

ISC GRANDE
ECOLE
paris

Studyrama
GRANDES ÉCOLES

**BANQUE COMMUNE
D'ÉPREUVES CCIR
CORRIGÉES**

be our
change



**ACTION LEARNING :
100 PROJETS
D'ENTREPRISES**



**DIPLÔME VISÉ
BAC+5 - GRADE
DE MASTER**



**EN M1 ET M2,
POSSIBILITÉ
D'ALTERNANCE**



**JUSQU'À 36 MOIS
À L'ÉTRANGER**



**+ DE 19 000
ALUMNIS**

Mandjalia, 23 ans
Étudiante en Master 2 à l'ISC Paris

programme
**GRANDE
ECOLE**

2020

2021



SÉRIE « ANNALES »

ANNALES 2020 DE LA BANQUE D'ÉPREUVES COMMUNES CCIR

SUJETS ET CORRIGÉS

HEC

ESSEC

ESCP EUROPE

EMLYON

EDHEC

GEM

IÉNA

BSB

LA ROCHELLE BS

EM STRASBOURG

SCBS

Le mot

ESPACE PRÉPAS

Préparationnaires, futurs candidats à l'intégration de l'une des vingt-trois Grandes Écoles de management qui recrutent via le concours BCE en 2021, ne lâchez pas ce livre ! Vous avez entre les mains l'un des outils les plus précieux pour accompagner votre préparation aux écrits qui se dérouleront en avril et mai prochains. Vos professeurs prévoient certainement de vous faire travailler sur des épreuves tombées l'an passé, voire lors de sessions précédentes du concours, et ils ont raison... pour deux raisons : l'approche technique et la mise en condition physique ! Comme le sportif s'entraîne pour réussir une compétition, le préparatoire s'entraîne pour réussir les concours. Cela passe par la connaissance la plus précise possible des consignes, la maîtrise des attendus de chaque épreuve, et par une série de mises en situation pour vous confronter à des sujets sur lesquels ont planché vos aînés, seuls ou sous la supervision de vos professeurs. Ils ne sont de toute façon jamais loin, et encore moins dans ce cas précis, puisque ce sont eux les auteurs de l'ensemble des corrigés que vous trouverez dans ces pages. Nous avons veillé à rassembler le panel de sujets le plus représentatif possible de la diversité et de l'exigence du concours. À chaque fois qu'ils l'ont jugé nécessaire, les professeurs ont agrémenté leurs corrigés de commentaires, de réflexions, de conseils aux futurs candidats. Un grand merci à eux pour ce travail précieux qu'*Espace Prépas* a le plaisir de vous adresser. Vous le savez déjà si vous consultez régulièrement le site Espace Prépas (<https://grandesecoles.studyrama.com/espace-prepas>), ce que je ne saurais trop vous conseiller ! Vous y trouverez toute l'année des informations sur les concours et des actualités sur les écoles analysées par la rédaction d'*Espace Prépas* en plus d'articles de géopolitique, de culture générale, d'économie, de méthodologie... écrits par vos professeurs. Avec tout cela, le concours, ce sera juste l'occasion de décrocher vos meilleures notes de l'année !

Nicolas Fellus
Directeur de la Rédaction

Sommaire

LE MOT D'ESPACE PRÉPAS	3
COEFFICIENT ET COOPTATIONS	
LES ÉPREUVES DU CONCOURS ISC PARIS 2021	8
PRÉSENTATION DE L'ISC PARIS	9
ÉPREUVES COMMUNES	
CULTURE GÉNÉRALE	
ÉPREUVE EMLYON BS/HEC PARIS	14
CONTRACTION DE TEXTE	
ÉPREUVE HEC PARIS	19
SYNTHÈSE DE TEXTES	
ÉPREUVE ESCP BS	28
OPTION SCIENTIFIQUE	
HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN	
ÉPREUVE ESCP BS	39
ÉPREUVE GEM	57
MATHÉMATIQUES	
ÉPREUVE EDHEC BS	74
OPTION ÉCONOMIQUE	
ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE DU MONDE CONTEMPORAIN	
ÉPREUVE ESSEC BS	88
ÉPREUVE ESCP BS/SKEMA BS	95

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE EDHEC BS

101

ÉPREUVE EMLYON BS

115

OPTION TECHNOLOGIQUE

ÉCONOMIE

ÉPREUVE ESSEC BS

130

ÉPREUVE SCBS

141

DROIT

ÉPREUVE ESSEC BS

149

ÉPREUVE SCBS

154

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE BSB

161

ÉPREUVE ESCP BS

175

ISC GRANDE ECOLE

paris

be our
change

Mandjalía, 23 ans

Étudiante en Master 2 à l'ISC Paris



**ACTION LEARNING :
100 PROJETS
D'ENTREPRISES**



**DIPLOME VISÉ
BAC+5 - GRADE
DE MASTER**



**EN M1 ET M2,
POSSIBILITÉ
D'ALTERNANCE**



**JUSQU'À 36 MOIS
À L'ÉTRANGER**



**+ DE 19 000
ALUMNIS**

programme
**GRANDE
ECOLE**

2020

2021

23^{ÈME} PLACE CLASSEMENT
LE FIGARO ÉTUDIANT 2021



COEFFICIENTS DES ÉPREUVES ÉCRITES 2021

Choix des épreuves écrites, avec indication des coefficients attribués à chacune d'elles (barrer d'une croix les cases non retenues) :

		OPTIONS			
		S	E	T	B/L
Contraction de texte	HEC Paris	3	3	X	
Étude et synthèse de textes	ESCP BS	X	X	X	
Résumé de texte	ICN BS/ISC Paris BS			3	
Langues vivantes	IENALV I	8	7	4	5
Langues vivantes	IENALV II	5	5	3	3
Langues vivantes	ELVIL V I	X	X	X	X
Langues vivantes	ELVILV II	X	X	X	X
Sciences sociales	AUDENCIA BS/ESSEC BS/ HEC Paris				6
Mathématiques	ESSEC BS/HEC Paris				X
Dissertation de culture générale	emlyon BS/HEC Paris	5	4	X	
Dissertation de culture générale	La Rochelle BS			3	
Dissertation de culture générale	EDHEC BS/ESSEC BS	X	X	X	
Dissertation littéraire	ESSEC BS				6
Dissertation philosophique	HEC Paris				5
Mathématiques S	ESSEC BS/HEC Paris	X			
Mathématiques S	emlyon BS	4			
Mathématiques 2 S	ESCP BS/HEC Paris	X			
Mathématiques S	EDHEC BS	X			
Mathématiques E	ESSEC BS/HEC Paris		X		
Mathématiques E	emlyon BS		3		
Mathématiques 2 E	ESSEC BS		X		
Mathématiques E	EDHEC BS		X		
Mathématiques T	ESCP BS			X	
Mathématiques T	BSB BURGUNDY BS			3	
Histoire géographie et géopolitique	ESCP BS	X			
Histoire géographie et géopolitique	ESSEC BS	X			
Histoire géographie et géopolitique	GRENOBLE EM	5			
Économie, sociologie et histoire	HEC Paris		X		
Économie, sociologie et histoire	ESCP BS/SKEMA BS		8		
Économie, sociologie et histoire	ESSEC BS		X		
Histoire	ESCP BS				5
Économie-Droit	ESSEC BS			X	
Économie-Droit	SOUTH CHAMPAGNE BS			5	
Management et sciences de gestion	HEC Paris			X	
Management et sciences de gestion	INSEEC SBE/ EM NORMANDIE			9	
TOTAL DES COEFFICIENTS :		30	30	30	30

LA DIRECTION

Président du groupe :	Jean-Paul Aimetti
Directeur Général :	Jean-Christophe Hauguel
Directeur Général adjoint Académie et Programmes :	Thierry Delecolle
Directrice du Programme Grande École :	Julia Guinchard-Nascimento
Directeur Entreprises Étudiantes :	Aymeric Pichot
Chargée promotion Classes Prépas :	Léo Drapier

INFORMATIONS GÉNÉRALES

Principaux repères

Une formation académique, internationale et professionnelle sur 3 ans

- Création : 1963 (association loi 1901) ;
- Situation : **Paris**, ville privilégiée pour l'emploi, les stages, les partenariats ;
- Reconnaissance par l'État : 1969, **Diplôme visé à Bac+5** par la CEFDG (Commission d'Évaluation des Formations et Diplômes de Gestion) et conférant le **Grade de Master** ;
- Membre de la Conférence des Grandes Écoles ;
- Membre du Chapitre des Écoles de Management ;
- Accréditée **AACSB, AMBA et EFMD accredited Master** ;
- Membre de l'EFMD (European Foundation for Management Development) ;
- Membre de l'UGEI (Union des Grandes Écoles Indépendantes) ;
- Membre de la FNEGE (Fondation Nationale pour l'Enseignement et la Gestion des Entreprises) ;
- Membre de l'EAIE (European Association for International Education) ;
- Membre de la NAFSA (Association for International Educators) ;
- Membre de Campus France.

Quelques chiffres

- **2000** étudiants ;
- Un corps professoral composé de professeurs permanents, d'enseignants-chercheurs et d'experts professionnels ;
- De nombreuses **spécialisations et des doubles diplômes** ;
- **11** Entreprises Étudiantes qui portent chaque année plus de 100 projets (culture & arts, sports & aventures, service aux étudiants, humanitaire) ;
- **130** accords internationaux dans **43** pays ;
- Au minimum 14 mois de stage ;
- **Des coopérations actives avec plus de 1200 entreprises** ;
- **40356 €** de salaire annuel au 1^{er} emploi ;
- **Plus de 19000** anciens élèves.

Frais de scolarité : 9900 € en 1^{re} année et **11 950 €** par an en 2^e et 3^e années pour l'année scolaire 2022/2023 (frais réévalués chaque année).

Financement des études: bourses d'État, **bourses ISC Paris** (de 500 à 1 600 €), prêts bancaires à taux préférentiels. Job service interne (ISC Network, missions rémunérées 10 € de l'heure), emploi du temps aménagé et alternance possible en contrat de professionnalisation ou apprentissage.

B E OUR CHANGE

Dans un monde interpellé par la globalisation de l'économie, les multiples changements du système économique et social, les évolutions technologiques incessantes, la mission de l'ISC Paris est d'assurer aux élèves sélectionnés une formation généraliste au management, de haut niveau académique assise sur une activité de recherche diversifiée, réellement professionnalisante et conduisant à une insertion professionnelle de qualité.

Dans le cadre de cette formation, l'ISC Paris se donne aussi pour mission :

- d'accompagner les élèves à devenir acteurs responsables de leur formation et de l'acquisition de leurs connaissances, à construire leur identité professionnelle et à développer leur capacité à donner du sens au travail ;
- de développer les capacités décisionnelles des élèves par une pédagogie de l'action stimulant l'esprit d'entreprise, par la mise en œuvre d'enseignements transversaux et par l'acquisition d'une bonne pratique des réseaux ;
- de conduire des activités de recherche diversifiées : recherche à visée managériale, à visées théoriques et à visée pédagogique ;
- d'encourager les élèves à la prise de risque en milieu complexe et incertain, en leur donnant le goût de l'entrepreneuriat, et en développant leurs capacités d'analyse et de synthèse, de créativité et d'innovation, de prise de décision.
- de construire des communautés apprenantes favorables à l'apprentissage collaboratif, source d'intelligence collective et de création de valeur ;
- de préparer les élèves à la conduite du changement par l'hybridation des savoirs, par la capacité à l'approche globale des problématiques de l'entreprise, par l'ouverture d'esprit et la culture générale, par le développement du leadership ;
- de prédisposer les élèves à assurer des responsabilités professionnelles dans un environnement international par une exposition aux réalités internationales et une approche multiculturelle du management ;
- d'amener les élèves à prendre conscience des exigences de l'éthique des affaires, de la responsabilité sociale de l'entreprise et de créer les conditions favorables d'une pratique de l'altérité, du respect de l'autre et de la solidarité.

DEVENIR EXPERT ET TROUVER SA VOIE

Objectif : dispenser une formation académique de qualité, professionnalisante et personnalisée.

Marketing, droit, communication, gestion, finance... avec 44 matières à valider au cours de vos deux premières années d'études, vous aurez la possibilité d'acquérir les connaissances et compétences nécessaires pour mener à bien les principales missions d'un manager : définir une stratégie marketing et commerciale, diriger une équipe, gérer un budget...

Forte d'un parcours classique, international et spécifique Expertise, Audit et Contrôle, la formation de l'ISC Paris offre une polyvalence et une pluridisciplinarité fortement appréciées des recruteurs, complétée par 5 pré-spécialisations au choix en 2^e année.

En 3^e année, avec plus de 300 heures de spécialisation, vous maîtriserez parfaitement l'un de nos domaines d'expertise. De la finance au marketing, du luxe aux nouvelles technologies, des ressources humaines à l'international, chacun pourra trouver les enseignements qui conviendront le plus à sa vocation et s'approprier la technicité et les compétences clefs pour réussir et développer ses ambitions professionnelles.

Ces spécialisations Masters vous ouvriront les portes des recruteurs les plus exigeants.

LES SPÉCIALISATIONS ET DOUBLES DIPLÔMES DE 3^E ANNÉE

PÔLE MARKETING / COMMUNICATION ET RELATIONS COMMERCIALES

- Management des relations commerciales
- Marketing digital e-business
- Marketing stratégique
- Double diplôme MSc International Business et Marketing

PÔLE MANAGEMENT

- Entrepreneuriat et innovation
- Innovation in European Business DD
- Management des Systèmes d'information
- International Business and Management
- Management des Ressources Humaines
- Conseil et financement de projets
- Double diplôme MSc International Business et Supply Chain

PÔLE FINANCE ET AUDIT

- Expertise Juridique et Fiscale / Gestion de Patrimoine DD
- Finance
- Gestion des Risques Financiers DD
- Expertise Audit et Contrôle (dispense 18 épreuves sur 20 du DCG et DSCG)
- Double diplôme MSc International Business et Finance

DD = Double diplôme

METTRE LE CAP SUR L'INTERNATIONAL POUR S'OUVRIRE AU MONDE

Objectif : vous ouvrir les portes de l'international.

Conscient du caractère primordial des langues sur le marché du travail, l'ISC Paris vous offre la possibilité d'étudier jusqu'à trois langues étrangères.

C'est pour vous une triple opportunité :

- **Perfectionner votre niveau en anglais**, langue des affaires par excellence, et valider une qualification officielle (TOEFL et/ou TOEIC). À l'ISC Paris, les meilleurs étudiants en anglais pourront suivre un cursus bilingue et international ;
- **Renforcer vos compétences dans une 2^e langue déjà étudiée (espagnol, allemand, italien, chinois) ou suivre des cours d'anglais renforcé ;**
- **Si votre niveau d'anglais vous permet de suivre le parcours international** (cours 100 % en anglais), possibilité de choisir une 3^e langue (espagnol, allemand, italien, chinois) afin de vous préparer à aborder les nouveaux marchés en pleine effervescence !

Au-delà de votre niveau linguistique, ce sont vos expériences réelles à l'international qui feront la différence aux yeux des recruteurs.

À l'ISC Paris, vous aurez la possibilité en 1^{re} année de faire un stage de 4 mois à l'international ; en 2^e ou 3^e année d'effectuer un échange d'1 ou 2 semestres chez l'une de nos universités partenaires avec la possibilité d'obtenir le diplôme de l'université d'accueil ; d'effectuer un stage de 6 à 8 mois à l'étranger.

Pour ceux dont l'objectif professionnel n'est pas orienté vers l'international, il faudra néanmoins valider le « passeport international » en validant le TOEIC avec un score minimum de 785 points et/ou son TOEFL à 90 points pour les élèves en alternance ou pour ceux en initial, en vivant au moins une expérience à l'international : lors d'un stage de 16 semaines minimum et/ou lors d'un échange dans l'une de nos 130 universités partenaires dans 44 pays.

S'IMMERGER EN ENTREPRISE ET DEVENIR PROFESSIONNEL

Objectif : faire de l'entreprise un lieu d'acquisition des compétences.

Lors de vos recherches de stages et d'emplois, les recruteurs seront particulièrement attentifs à vos expériences professionnelles. En bref : à ce que vous savez faire !

L'ISC Paris a donc développé sa pédagogie autour de l'acquisition d'expériences, en proposant 12 à 26 mois de stage au cours des trois années. Ces expériences de terrain vous permettront d'appréhender les missions d'entreprises, de tester différents secteurs d'activité et d'acquérir des compétences professionnelles. De plus, vous pourrez choisir de passer 12 mois en entreprise entre votre 2^e et 3^e année, c'est l'année d'expérience professionnelle. Pour vous aider à aborder ces stages de façon efficace et professionnelle, vous bénéficierez d'un coaching personnalisé.

Autre atout : vous profiterez à Paris, d'une situation géographique exceptionnelle, qui vous donnera accès à un important réseau d'entreprises dans des domaines d'activité variés.

Des moyens mis en place pour accompagner la recherche de stage

- Jobteaser est une plateforme proposée à tous les étudiants de l'école, ce sont près de 9 000 offres de stages qui sont proposées.
- MyISCstage permet aux recruteurs de déposer leurs offres de stage à partir de notre site internet et à nos étudiants de les consulter en temps réel. Cet outil permet aussi à nos étudiants d'être en contact avec les différents recruteurs afin d'échanger avec eux sur les missions proposées.

Des outils pour trouver son 1^{er} emploi :

- Les forums ISC Paris : permettent quatre fois dans l'année à nos étudiants de rencontrer les entreprises qui recrutent ;
- La semaine des métiers et la quinzaine des secteurs d'activité ;
- Les ateliers CV/emploi ;
- CV des jeunes diplômés en ligne, consultables par les entreprises ;
- La rédaction et la soutenance d'un projet professionnel pour chaque étudiant de 3^e année ;
- Un réseau actif de plus de 19 000 alumni ;
- Plus de 9 000 offres d'emploi déposées par an.

UNE PÉDAGOGIE PAR L'ACTION : « ENTREPRENDRE POUR APPRENDRE »

Objectif : créer un pont entre connaissances et expérience professionnelle grâce à l'univers des Entreprises Étudiantes.

Dès votre première année, et pendant toute votre scolarité, vous pourrez allier formation académique et missions réalisées au sein de votre Entreprise Étudiante. L'intérêt premier de cette « alternance » est de vous permettre d'appliquer l'ensemble des connaissances enseignées en cours lors de missions d'entreprises réelles.

Point d'orgue du parcours, les Entreprises Étudiantes vous obligeront à gérer un emploi du temps chargé, à l'image des managers en activité. Des expériences qui vous apprendront à vous organiser, à planifier, à déléguer, à anticiper... des qualités attendues par les entreprises.

Depuis plus de 50 ans, l'ISC Paris accompagne ses élèves sur le chemin de la réussite.

CULTURE GÉNÉRALE

DURÉE : 4 HEURES.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout autre matériel électronique est interdite.

S U J E T

DISSERTATION

Peut-il y avoir une civilisation du désir ?

C O R R I G É

Par Tony Brachet, agrégé de philosophie, ancien ENS St-Cloud, correcteur des Grandes Écoles de commerce.

Jacques Lacan ayant résumé l'« éthique de la psychanalyse » par la maxime *ne cède pas sur ton désir*, Daniel Sibony lui objecta que *s'il est une chose sur laquelle on ne cède pas, c'est bien le désir*. Dira-t-on, avec le philosophe – en vue d'accorder les « analystes » – que le désir est, de toute manière, *l'essence de l'homme* ? Ce serait se donner la partie trop belle, car alors la réponse « tomberait du ciel » : plus on désire, plus on « fait l'homme ». Du coup, *s'il est vrai* que l'homme est l'être *civilisé* – nous en discuterons – ce serait aussi l'homme désirant.

Est-ce bien la vérité ? Les auteurs de l'*Anti-Ceïdipe*, Deleuze et Guattari, s'ils étaient encore de ce monde, assumeraient avec joie – ce « passage à une plus grande perfection » donc à un plus ample désir – cette proposition. Deleuze n'avance-t-il pas – seul contre tous – que le désir est *créateur*, qu'il n'est pas défini par un *manque* ni par une relation d'*objet* – oral, anal, phallique... – ni, surtout, « conditionné » par l'*Ceïdipe* – mais, au contraire d'une *surabondance* telle qu'on y reconnaît presque les attributs que la théologie accordait à l'*Amour* ?

Dans cette acception, le désir est certainement « civilisationnel ». Une véritable théandrie en a fait, vers la fin des « Glorieuses », une dimension véritablement initiatique. Parler, avec Pierre Boutang, d'*Apocalypse du désir* est inquiétant ; mais, avec Deleuze, la « *petite machinerie productive* » – l'auteur étant matérialiste – d'un *plus-de-jouir* (mieux, d'un *jouir* vraiment *jouir*) ne devant pourtant *absolument rien* à la *plus-value* est hautement flatteur pour notre désir de liberté, et, en tout cas, interpelle notre contemporanéité. Qu'est-ce qu'une *civilisation* ? À interroger l'historien de l'« ère » deleuzienne, un consensus penchait pour l'existence d'un grand nombre de cultures,

et de deux « civilisations » – l'euro-péenne et la chinoise. Mais *quid* de l'islamique, et de l'indienne ? On en venait alors à des « amphibologies » entre *civilisation* et *culture* – les facteurs religieux, linguistiques, territoriaux, idéologiques « diffractant » inévitablement chaque identité à son échelle. L'orthodoxie, par exemple, a « civilisé » la Russie – mais le marxisme l'a-t-il « barbarisée » ?

Ces discussions, réglées « à la hache » dans l'Anti-Œdipe – qui se contente de distinguer, dans le style de Lévy-Bruhl, *sauvages, barbares, civilisés* – ne renseignent guère sur ce que pourrait être une *civilisation du désir*. Est-il possible de définir « transcendentale-ment » le concept de *civilisation*, à la façon de Kant – sans préjuger des peuples, des langues, des croyances – dans *l'Idée d'une histoire universelle du point de vue cosmopolitique* ?

Quel *sens* pourrait revêtir alors l'expression *civilisation du désir* ? Connaissons-nous bien l'« essence du désir » ? Comment pourrait-il être « civilisé », voire « civilisateur ».

Enfin, quel rapport – fondé ou infondé, conscient ou inconscient – de l'humain à sa propre histoire peut-il la justifier ou du moins l'expliquer ?

Trois axes, sans doute d'inégale ampleur, sont apparus. Nous avons relevé plus haut quelques-uns des pièges liés à l'*historicité*. Nous ne nous enliserons pas dans la périlleuse confrontation des *aires linguistiques* – qui opposent catégoriquement, selon Gustave Guillaume, les modes d'expression *caractéristiques* ou *agglutinant* des régions orientales des traits *flexionnels* de l'Occident, en passant par le modèle « intermédiaire » des langues sémitiques – fournissant selon lui des schèmes distincts pour les *mentalités*.

Nous ne nous attarderons pas non à l'investigation diachronique, celle, par exemple, de la transmission de l'*imperium* dans les « quatre Empires mondiaux » recensés par le *livre de Daniel*, transmission qui finalise l'idée de civilisation jusqu'à la « cité de Dieu » du judéo-christianisme, eschatologie où convergent les cultures alors connues. L'investigation, par exemple, de la spécificité assyrienne, puis babylonienne, enfin perse, ou de la « centration » du monde, au temps de César, dans une « Égypte hellénistique » éclairerait le « civilisationnel », mais non notre question.

Si, par contre, forts de l'ironique remarque de Pascal, nous pensons – à tort ou à raison – que *si le nez de Cléopâtre eût été plus court, toute la face de la terre aurait changé*, nous devenons immédiatement attentifs au *désir* de César, dont Plutarque écrit que, n'eût été la jeune reine, il n'eût pas envahi l'Égypte. Rétorquera-t-on que l'univers hellénistique décadent dépendait d'autant plus du désir de César ou du caprice de Cléopâtre qu'il était devenu moins civilisationnel – et appelait un changement d'ordre spirituel ?

Que l'on interroge alors le désir de Nabuchodonosor (II) fort peu soucieux de consigner ses campagnes militaires, et à l'extrême, au contraire, d'« inonder » l'empire babylonien de monuments dédiés à des dieux nationaux voire personnels, s'attirant parfois l'inimitié des prêtres. Les Orientaux, écrit Hegel, pensaient qu'*un seul est libre* : celui qui, tenant l'*imperium* – parfois transcendant définit une civilisation entière comme la matérialisation de son désir.

C'est pourquoi avancer, avec Deleuze, qu'un *mode de vie* – de production, de consommation, d'« enregistrement » par la culture – déploie *une* forme du *désir* paraît sensé. Kojève dans son *Esquisse d'une doctrine de la politique française*, rédigé au sortir de la guerre et alors qu'il tente de définir un *empire latin* valorise, non tant une « mentalité » – selon lui, catholique – mais un

habitus que résume l'image d'une « *dolce vita* », face à un monde orthodoxe « austère » et un monde protestant « productif », webérien.

Nous pourrions voir, forts de ces remarques, dans les civilisations – en tout cas chrétiennes, celles qui *incarnent* leurs représentations sous une forme « territorialisée » – des *formations de désir*, au sens où Freud parle de *formations de l'inconscient*. Cette approche nous conduira à *différencier* le désir, parlant *des* désirs humains. Mais c'est alors l'unité *civilisationnelle* qui s'évanouit. Tout désir n'est pas désir de salut, et nous n'avons plus le sentiment de parler là *du* désir.

Peut-il donc y avoir une civilisation *du* désir ? Il faudrait pour cela que le désir fût *civil*. Or, il ne l'est pas. Sous sa forme *immédiate*, celle d'essence de tous les êtres – chez Spinoza – le désir est simplement *vital*. Sous sa forme *réfléchie* – le « désir de désirer » chanté par Nietzsche, il isole l'individu, le rend dépressif et nostalgique. D'où le « procès » qu'intentent Platon, mais aussi Tolstoï – dans la *Sonate à Kreutzer* – à la musique, dont Lénine affirmera qu'elle paralyse l'action. Sous sa forme *dialectique* enfin, le désir de reconnaissance ou désir du désir, *l'intention* est civile, mais la réalisation se heurte à l'« insociable sociabilité ».

Illustrons ces propositions.

La *vitalité* du désir l'adosse au *besoin*, privilégiant la « bête humaine », volontiers incivile – comme dans toute l'œuvre de Zola – sauf là où le désir se meut en amour. Devient-il *volonté* ? Celle-ci est *de puissance* comme le démontre Heidegger : dans la *volonté de puissance*, c'est la puissance qui veut. Ainsi le beau « désir de désirer » de *Zarathoustra* est *impuissance*, au mieux sublimation : les gros poissons mangent les petits d'un droit naturel souverain, laissant à la sécheresse du rêve ou de la pénurie le menu fretin. De la *naturalité* du désir on conclut, de « Calliclès » à Hobbes, à *l'incivilité* humaine. Pour le rhéteur, la *loi*, la civilité du désir, n'est que fiction régulatrice : le désir *légitime* est celui du plus fort. Seul le tyran, ajoute l'auteur de *Léviathan*, – le sujet supposé désirer – affranchit les hommes d'une violence mutuelle illimitée. Machiavel enfin ajoute, à la vertu du loup, celle du renard, qui est aussi celle du Prince. Pour Nietzsche, il lui arrive certes d'idéaliser la *volonté de puissance* en expression esthétique, mais ordinairement, ainsi dans *Par-delà le bien et le mal* – la forme « la plus douce » de cette dernière est d'« exploiter » ou « dépouiller » le faible.

Une « civilisation » du désir ne saurait être démocratique. Plus même qu'*incivil*, brutal, im-*poli*, le désir est *inégal*. Il avoisine, comme l'a montré Sartre, la perversion sadique. L'amour, en regard, est masochisme. *Désir* et amour constituent deux modalités opposées de *l'être-pour-autrui*. Le langage, sans lequel il n'est ni « contrat social » ni *loi*, est également du côté du masochisme. Kojève en voit l'origine dans la *supplication* qu'adresse, à l'issue de la *lutte pour la reconnaissance*, le vaincu, demandant que sa vie soit épargnée.

Le *désir du désir* – axiome explicitement introduit par l'auteur de *l'Introduction à la lecture de Hegel* – conduit à la hiérarchie sociale la plus indésirable, puisque même le *Maître* n'est reconnu que par quelqu'un qu'il ne reconnaît pas. Quant au *Valet* (Knecht), si marqué par la *mort* qu'on a sans doute raison de le nommer *Esclave*, il ne *parle* – le premier – que pour *céder sur son désir* et se *soumettre* en acceptant ce pacte de dépendance qui faisait horreur à Grotius. Il sauve sa vie, mais perd sa liberté, et son désir, *refoulé* [*verdrängt*] devient *travail*.

La société humaine est *insociable* et repose sur la contradiction qu'a perçue le génie de Rousseau. Elle n'est pas une *société du désir* – une société libertine par exemple, avec ses règles propres, opposées aux règles « bourgeoises » des *vices privés* et des *vertus publiques*, ou encore une transparente « académie de nobles esprits » comme l'Abbaye de Thélème. L'opacité de la *vie*, sur laquelle insistent, et Hegel, et Sartre, empêche le *désir humain* d'être d'emblée « social ».

Nous n'avons aucune en effet, dans notre *désir vital* d'autrui, nulle intention de *reconnaître* l'autre, fût-ce en perdant la possibilité d'en jouir. Nous ne pouvons, et de la manière la plus incivile, que *l'instrumentaliser* : soit en le transformant en serviteur ; soit en l'épousant selon des normes névrotiques ; soit en lui imposant, sous le masque du droit, une jouissance *perverse* que Lacan – dans *Kant avec Sade* – met en parallèle avec l'*usufruit sexuel* qui définit littéralement, pour Kant, le mariage, exercice d'un *droit personnel à modalité externe*.

Comment *civiliser* ces désirs, les rendre conforme à une *finalité* – non une essence – digne de l'humanité, éthique ? Le *désir*, et lui seul, articulerait éthique et *politique*, nous permettant de *ne pas céder sur la civilisation*.

Nous disions le *désir incivil*. Peut-il cependant être éduqué, voire éducatif ? *L'égoïsme* – écrit Freud – *enseigne l'amour*. On connaît la distinction rousseauiste entre amour-propre et *amour de soi*, ce dernier étant proprement « civilisateur », alors que le premier alimente la haine. Or, l'amour de soi est lié à la *modération* dans les désirs – vertu antique qui conduit à les réduire aux besoins : l'animal repu est, peut-on dire, civilisé *a minimis* car, il se contentant de son état, il ne tourmente pas son « prochain », ce pour quoi il a pu être dit meilleur que nous.

On peut certes opposer ce *contentement* à la *satisfaction* – l'insatiable satisfaction, pour parodier Kant – qui suppose, outre l'équilibre « naturel » du *désir* (le plaisir, sans l'angoisse), la *reconnaissance* de sa particularité par d'autres. Tel est, en effet, le véritable but du *désir humain*. Non cette réplétion égoïste que la moins « sociable » des sociétés peut encore gérer, transformant les *eaux glacées* du calcul éponyme en de rafraîchissantes boissons ; mais cette *valorisation* que l'égoïsme le plus subtil – et de mieux en mieux partagé – garantit si peu.

La dialectique des désirs – et des plaisirs – prend aujourd'hui un relief particulier. Il est des *désirs naturels et nécessaires*, sur lesquels met l'accent la sagesse de Rousseau ; des *désirs naturels*, mais contingents – le verre d'eau glacée ou le corps du partenaire, que Sartre n'hésite pas à rapprocher dans *l'Être et le néant*, avant d'en distinguer avec peine les objets ; des *désirs* enfin qui ne sont pas naturels – dont le *désir de reconnaissance*, ou, chez Hobbes, la *vaine gloire*.

Le « *désir du désir* » pourrait ne pas alimenter l'*inégalité* issue – non de l'*insociable sociabilité* humaine, finalement civilisatrice – mais de la rivalité, puis de la hiérarchie de la *reconnaissance*, laquelle induit l'*autorité*. Nous tenons maintenant l'esquisse d'une solution. Il y a différents *niveaux* de *désir* – non différentes classes d'*objets*, le seul qui intéresse l'humain étant le *désir* lui-même : un « *désir du Maître* », un *désir* « *servile* » – et un *désir citoyen*. *Chacun* de ces *désirs* « civilise ». Autour de chacun prend forme et se développe une « civilisation ». Civilisation « magistrale » du monde ancien où *un seul*, puis *quelques-uns* sont libres comme l'avance Hegel de l'Histoire. Civilisation « servile » ou féodale où l'emporte ce *désir de soumission* sans lequel, souligne – après La Boétie – Clastres, le pouvoir lui-même serait

inintelligible, favorisant la théâtralité sociale comme échange des conditions de maître et serviteur, dont témoigne Marivaux. Civilisation moderne, capitaliste ou « citoyenne » où l'État, ayant « vaincu » le servagisme, sinon l'inégalité, proclame la liberté de *tous*.

Grande est la tentation d'attribuer cette liberté au *désir* lui-même *comme si* ce dernier était Maître – voire, *signifiant*-maître. Certes le désir n'*obéit* pas à la volonté, ni, à peine plus que l'amour, à la loi. « Civil », ce sera au sens où, habilement servi par l'intelligence, il n'est en général pas « pénal ». La psychanalyse, par ailleurs, nous a déculpabilisés, à tel point que Deleuze et Guattari entendent la sacrifier elle-même au Désir, promu en « schize » collective, sans remarquer – souligne Clouscard – qu'ils continuent à parler de la *plus-value* et de l'*objet* dans un monde où le « Maître absolu » n'est plus la mort, mais l'argent.

Clouscard refuse d'appeler *civilisation* une hégémonie imaginaire – celle du fantasme – sous-tendue par un symbolisme spéculatif et aveugle. Il qualifie même – comme jadis Barthes l'avait fait de la langue – une telle hégémonie de « fascisante ». C'est sans doute trop attribuer au désir, qui ne terrorise personne depuis la débauche d'humour « post-historique » du Marquis de Sade – le troisième, professe Kojève, à avoir compris, avec Brummell et Hegel, que l'Histoire est « terminée ».

Convenons qu'une « maxime » qui aurait pour contenu un *impératif de désirer* – comme il y a, chez Lacan, un impératif de jouissance, celui du *surmoi* – ne saurait constituer une *civilisation*. Ceci, pour plusieurs raisons. D'abord, cette « civilisation » supposerait une *facilité* totale en abondance comme en sécurité (il faudrait pouvoir jouir librement, infailliblement et impunément). Elle exclurait donc l'*effort* par lequel nous séparons mentalement le *civilisé* du « sauvage », ainsi que celui par lequel nous nous torturons pour paraître au moins « barbare », par le mauvais goût par exemple d'un tatouage ou d'un peircing « mal placé », et qui tend, heureusement, à remplacer la torture du prochain.

Ensuite, l'abondance supposant, comme chez Marx, la disparition graduelle de la monnaie, mesure comparative de la *valeur* des objets de nos désirs – ceux-ci eux-mêmes cesseraient alors, progressivement, d'avoir « cours », car ils disparaîtraient avec l'émulation du désir de reconnaissance – ainsi du *look*, du « *snobisme* » et du « *semblant* ». *Tout est partout comme ici* : l'adage leibnizien traduirait notre lassitude par déqualification de nos désirs. Nos descendants auraient à traiter le sujet du « dernier homme » : *désirer, à quoi bon ?*

Enfin et surtout, la *conscience* disparaîtrait avec la facilité. Nous cessons de nous interroger sur l'opportunité d'un *choix* entre différents désirs. Celui de *philosopher* – désir nécessaire non-naturel – disparaîtrait avec le besoin de choisir. *Vivre ou mourir*, comme pour le stoïcien, deviendraient contingents – *c'est tout un, indifférent, de vivre ou de mourir – alors, pour-quoi ne suicides-tu pas ? – parce qu'il est indifférent de vivre ou de mourir*. Le désir, une fois détaché de la vie, n'y retourne pas. Il épouse le cours de l'Histoire, de Nabuchodonosor à Karl Lagerfeld et à leurs « abonnés ». Selon nous, dans ces conditions, mieux vaut – ce sera notre conclusion – *trop peu de civilisation que trop de désir*. En effet, insuffisamment civilisé, l'être humain n'est pas en état de dire « non » au *plus-de-désir* ; alors qu'il ne peut refuser le *plus-de-civilisation* qui lui est imposé par des êtres encore conscients, tels que les philosophes et les juristes.

CONTRACTION DE TEXTE

DURÉE : 3 HEURES.

Résumez en *QUATRE CENTS MOTS* plus ou moins 5 % (soit 380-420 mots), le texte suivant, en vous attachant à mettre en valeur les idées essentielles et les articulations de la pensée de l'auteur. Mentionnez le décompte par 50 mots et, en fin de copie, reportez le nombre de mots utilisés.

N.B. :

Cet exercice doit rester impersonnel dans le fond comme dans la forme, et respecter STRICTEMENT les limites imposées.

La copie doit être entièrement rédigée : la correction et la clarté de la langue entrent pour une part dans l'appréciation du correcteur.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

« La vérité est que les chefs-d'œuvre du roman contemporain en disent beaucoup plus long sur l'homme et sur la nature, que de graves ouvrages de philosophie, d'histoire et de critique », assurait Zola¹. Exercice de pensée et expérience d'écriture, la littérature répond à un projet de connaissance de l'homme et du monde. Un essai de Montaigne, une tragédie de Racine, un poème de Baudelaire, le roman de Proust nous en apprennent plus sur la vie que de longs traités savants. Telle fut longtemps la justification de la lecture ordinaire et la prémisse de l'érudition littéraire. La science les a-t-elle disqualifiées ? On l'a dit. « Dès que l'homme peut espérer de connaître, le jeu ne l'amuse plus, et l'artiste est dépossédé par le savant », observait Gustave Lanson en 1895². Cette tendance de longue durée aurait été amorcée dès l'âge classique, les belles-lettres perdant tour à tour de grands pans du discours et se restreignant peu à peu à la fiction difficile.

Bonald, penseur de la réaction, décrivait au début du XIX^e siècle ce qu'il nommait « la guerre des sciences et des lettres » : « On aperçoit depuis quelque temps des symptômes de mésintelligence entre la république des sciences et celle des lettres. [...] Les sciences accusent les lettres d'être jalouses de leurs progrès. Les lettres reprochent aux sciences de la hauteur et une ambition démesurée³ ». Les « sciences exactes » et les « lettres frivoles » – c'étaient ses termes – se disputaient le rôle de la morale, mais les sciences commençaient de jouir d'un prestige supérieur : « Tout annonce la chute prochaine de la république des lettres, et la domination universelle des sciences exactes et naturelles », concluait Bonald, tout en regrettant que les sciences morales – théologie et politique – ne fussent pas en état de « faire respecter leur médiation ».

1. Zola, « le naturalisme au théâtre », *Le Roman expérimental* (1880).

2. Gustave Lanson, « La littérature et la science », *Hommes et livres* (1895).

3. Louis de Bonald, *Mélanges littéraires, politiques et philosophiques* (1959).

Depuis, le thème des deux ou trois cultures est devenu un poncif. Le physicien Charles Percy Snow, dans une inoubliable conférence donnée à Cambridge en 1959, insista sur l'antagonisme irrévocable qui opposait la « culture scientifique » et la « culture littéraire ». Le sociologue Wolf Lepenies soutint en 1985 que le conflit mettait aux prises non pas deux, mais trois cultures, la troisième étant la « culture sociologique », bien rétablie depuis Bonald. Snow et Lepenies tenaient pour acquise l'expropriation moderne de la littérature, laquelle aurait perdu ses prérogatives séculaires face aux sciences de la nature et de la vie, puis aux sciences de l'homme et de la société.

Que vaut pourtant cette opposition, particulièrement figée par la culture française, entre scientifiques et littéraires ? Longtemps il n'y a pas eu d'antinomie entre les deux vocations, mais l'école a creusé l'hiatus, depuis la « bifurcation » instaurée en 1852 à partir de la classe de quatrième par le ministre de l'Instruction publique Hippolyte Fortoul, jusqu'à la réforme du secondaire de 1902, qui institua l'égalité de sanction entre les baccalauréats classique et moderne et marginalisa graduellement les langues anciennes et les humanités classiques au lycée.

Réagissant à la coupure présumée de la littérature et de la connaissance, certaines écoles littéraires visèrent la reconquête de l'autorité en s'inspirant du modèle scientifique. Baudelaire lui-même, hostile au concept romantique d'inspiration, s'enthousiasmait en 1852 pour la science : « Le temps n'est pas loin où l'on comprendra que toute littérature qui se refuse à marcher fraternellement entre la science et la philosophie est une littérature homicide et suicide⁴. » Il devait déchanter bientôt et promouvoir, avec la modernité, une littérature que Pierre Bourdieu a qualifiée d'« autonome », pour désigner sa spécialisation, sa restriction et son intransitivité croissantes.

Plus près de nous, les avant-gardes littéraires et théoriques de la fin du XX^e siècle ont cru qu'elles échapperaient au piège idéologique de la critique en se hissant aux formalismes de la science. La mauvaise conscience des littéraires a fait que, par un plaisant échange des rôles et chacun jouant à contre-emploi, les scientifiques se sont souvent comportés comme de meilleurs soutiens de la tradition humaniste. Aujourd'hui que nous vivons un bouleversement de l'école aussi décisif que le tournant de 1902, affectant non plus la culture classique et les langues anciennes, mais la culture moderne et la langue française, c'est la connaissance littéraire qu'il s'impose à nous de défendre.

Or, au cours de l'histoire, plusieurs définitions remarquables ont été données du pouvoir de la littérature – de son utilité et de sa pertinence. Ces définitions sont-elles encore recevables ? Si la question se pose, serait-ce parce qu'il est déjà trop tard pour y répondre ? On ne la posait pas du temps où le pouvoir de la littérature était avéré et qu'il s'agissait plutôt de la saper. Nous lisons parce que, même si lire n'est pas indispensable pour vivre, la vie est plus aisée, plus claire, plus ample pour ceux qui lisent que pour ceux qui ne lisent pas. En un sens très simple d'abord : vivre est plus facile – j'y songeais dernièrement en Chine – pour ceux qui savent lire, non seulement les renseignements, les modes d'emploi, les ordonnances, les journaux et les bulletins de vote, mais aussi la littérature. Ensuite, la culture littéraire fut longtemps censée rendre meilleur et donner une vie meilleure. Francis

4. Baudelaire, « L'école païenne » (1852).

Bacon a tout dit : « La lecture rend un homme complet, la conversation rend un homme alerte, et l'écriture rend un homme précis. C'est pourquoi, si un homme écrit peu, il doit avoir une bonne mémoire : s'il cause peu, il doit avoir l'esprit vif ; et s'il lit peu, il doit avoir beaucoup de ruse, pour paraître savoir ce qu'il ne sait pas⁵. » Suivant Bacon, proche de Montaigne, la lecture nous évite de devoir recourir à la sournoiserie, l'hypocrisie et la fourberie ; elle nous rend donc sincères et véritables, ou tout simplement meilleurs. Je rappellerai brièvement trois ou quatre explications familières du pouvoir de la littérature.

La première est la définition classique qui permet à Aristote de réhabiliter, contre Platon, la poésie au titre de la vie bonne. C'est grâce à la *mimesis* – traduite aujourd'hui par *représentation* ou par *fiction* de préférence à *imitation* – que l'homme apprend, donc par l'intermédiaire de la littérature entendue comme fiction. « Représenter est [...] une tendance naturelle aux hommes – et ils se différencient des autres animaux en ce qu'ils sont des êtres fort enclins à représenter et qu'ils commencent à apprendre à travers la représentation – comme la tendance commune à tous, de prendre plaisir aux représentations⁶. » La littérature plaît et instruit. Plus avant dans la *Poétique*, la *catharsis* elle-même, purification ou épuration des passions par la représentation, a pour résultat une amélioration de la vie à la fois privée et publique. La littérature – je ne justifierai pas ici l'anachronisme qui consiste à traduire *poiesis* ou *mimesis* par littérature – détient un pouvoir moral.

D'Horace à Quintilien et au classicisme français, la réponse restera la même : la littérature instruit en plaisant, suivant la théorie pérenne du *dulce et utile*. Comme le met La Fontaine :

Les fables ne sont pas ce qu'elles semblent être.
Le plus simple animal nous y tient lieu de maître.
Une morale nue apporte de l'ennui ;
Le conte fait passer le précepte avec lui.
En ces sortes de feinte il faut instruire et plaire,
Et conter pour conter me semble peu d'affaire⁷.

Le conte, la feinte, la fiction éduquent moralement. Prototype du roman réaliste, *Manon Lescaut* leur conserve ce rôle. Son « Avis de l'auteur » argumente fermement en ce sens : « Outre le plaisir d'une lecture agréable, on y trouvera peu d'événements qui ne puissent servir à l'instruction des mœurs ; et c'est rendre, à mon avis, un service considérable au public, que de l'instruire en l'amusant. » Prévost insiste sur le désaccord qu'on rencontre habituellement chez les hommes entre leur connaissance des règles et leur observation de celles-ci : « On ne peut réfléchir sur les préceptes de la morale, sans être étonné de les voir tout à la fois estimés et négligés ; et l'on se demande la raison de cette bizarrerie du cœur humain, qui lui fait goûter des idées de bien et de perfection, dont il s'éloigne dans la pratique. » Il explique cette « contradiction de nos idées et de notre conduite » par le fait que « tous les préceptes de la morale n'étant que des principes vagues et généraux, il est très difficile d'en faire une application particulière au détail des mœurs et des actions ». C'est pourquoi l'expérience et l'exemple

5. Francis Bacon, "Of studies", *Essays* (1597).

6. Aristote, *Poétique*.

7. La Fontaine, « Le pâtre et le lion », *Fables*.

guident la conduite mieux que les règles. Mais l'expérience dépend de la fortune : « Il ne reste donc que l'exemple qui puisse servir de règle à quantité de personnes dans l'exercice de la vertu. » Telle est l'utilité de son roman : « Chaque fait qu'on y rapporte est un degré de lumière, une instruction qui supplée à l'expérience ; chaque aventure est un modèle d'après lequel on peut se former ; il n'y manque que d'être ajusté aux circonstances où l'on se trouve. L'ouvrage entier est un traité de morale, réduit agréablement en exercice. »

Peu éloigné en vérité de Prévost, Robert Musil soutiendra encore au XX^e siècle que l'art « représente non pas abstraitement, mais concrètement, non pas le général, mais des cas particuliers dont la sonorité complexe englobe aussi de vagues notes générales⁸ ». Avec la littérature, le concret se substitue à l'abstrait, et l'exemple à l'expérience, pour inspirer des maximes générales ou du moins une conduite conforme à de telles maximes. Pas de meilleure définition du roman que celle de Prévost, et les philosophes du « tournant éthique » ne la désavoueraient pas aujourd'hui.

Cette réponse classique a d'ailleurs été mise à jour et reformulée par Paul Ricœur, après les années de la théorie littéraire : le récit – là encore, je ne scruterai pas les distinctions nécessaires entre *récit* et *fiction* – est irremplaçable pour configurer l'expérience humaine, à commencer par l'expérience du temps. La connaissance de soi présuppose ainsi la forme du récit.

Une deuxième définition du pouvoir de la littérature, apparue avec les Lumières et approfondie par le romantisme, fait d'elle non plus un moyen d'instruire en plaisant, mais un remède. Elle libère l'individu de sa sujétion aux autorités, pensaient les philosophes ; elle le guérit en particulier de l'obscurantisme religieux. La littérature, instrument de justice et de tolérance, et la lecture, expérience de l'autonomie, contribuent à la liberté et à la responsabilité de l'individu, toutes valeurs des Lumières qui présidèrent à la fondation de l'école républicaine et qui expliquent le privilège que celle-ci conféra à l'étude du XVIII^e siècle au détriment du XVII^e, catholique et monarchiste, à Voltaire contre Bossuet.

Lors d'un débat marquant qui eut lieu à la Mutualité en 1964 à l'initiative de *Clarté*, journal de l'UEC (Union des étudiants communistes), sous un titre – *Que peut la littérature ?* – qui répliquait à son propre *Qu'est-ce que la littérature ?*, Sartre lui-même, fidèle à l'esprit des Lumières, imputait à la littérature – même s'⁹ il n'y a pas de livre qui ait empêché un enfant de mourir » – le pouvoir de nous faire échapper « aux forces d'aliénation ou d'oppression ».

La littérature est d'opposition : elle a le pouvoir de contester la soumission au pouvoir. Contrepouvoir, elle révèle toute l'étendue de son pouvoir lorsqu'elle est persécutée. Il en résulte un paradoxe irritant, à savoir que la liberté ne lui est pas propice, puisqu'elle la prive des servitudes auxquelles résister. Ainsi l'affaiblissement de la littérature dans l'espace public européen à la fin du XX^e siècle pourrait-il être lié au triomphe de la démocratie : on lisait plus en Europe, et non seulement à l'Est, avant la chute du mur de Berlin. Antidote à la fragmentation de l'expérience subjective qui a suivi la révolution industrielle et la division du travail, l'œuvre romantique a prétendu restaurer l'unité des communautés, des identités et des savoirs, et par là rédimmer la vie. Comme l'annonçait Wordsworth, « en dépit des choses devenues

8. Robert Musil, « L'obsécène et le malsain dans l'art » (1911), *Essais*.

silencieusement insensées, et des choses violemment détruites, le poète lie ensemble par la passion et par la connaissance le vaste empire de la société humaine, comme il se répartit sur toute la terre et dans tous les temps ». La littérature d'imagination, justement parce qu'elle est désintéressée – une « finalité sans fin », ainsi que l'art se définit depuis Kant –, acquiert un intérêt à nouveau paradoxal. Si elle seule peut tenir lieu de lien social, c'est en effet au nom de sa gratuité et de sa largesse dans un monde utilitaire caractérisé par les spécialisations productives. L'harmonie de l'univers est restaurée par la littérature, car sa propre unité est attestée par la complétude de sa forme, typiquement celle du poème lyrique. Dans la lecture – pensons aux *Méditations poétiques* de Lamartine –, la conscience trouve un accord pleinement vécu avec le monde. Ainsi la littérature, à la fois symptôme et solution du malaise dans la civilisation, dote-t-elle l'homme moderne d'une vision qui porte au-delà des restrictions de la vie journalière.

Mais tout remède peut empoisonner : soit il guérit, soit il intoxique, soit encore il guérit en intoxiquant, tel « le remède dans le mal » du beau titre de Jean Starobinski. On se rend malade de littérature comme Madame Bovary ou des Esseintes. Si la littérature affranchit de la religion, elle devient elle-même un opium, c'est-à-dire une religion de substitution, suivant la vision marxiste de l'idéologie, car telle est l'ambivalence de tout supplément.

La littérature a tenu lieu de morale commune au XIX^e et au début du XX^e siècle, après la religion et en attendant que la science prît le relais : Auguste Comte, Sainte-Beuve, Gustave Lanson – ou Matthew Arnold en Angleterre – furent les promoteurs d'une substitution réalisée de manière exemplaire à l'école de la Troisième République. Rempart contre la « barbarie de l'intérieur », ainsi que les dangers de l'immoralisme prolétarien étaient désignés en Angleterre, elle élèvera le peuple à un idéal esthétique et éthique, et contribuera à la paix sociale. C'est ainsi que les grands écrivains ont été embrigadés au service de la nation.

On s'est rebellé contre cette récupération de la littérature. Les partisans de l'art pour l'art en voulaient aux saint-simoniens, aux socialistes et aux républicains qui donnaient pour mission à la littérature de guider le peuple. Mais comme cette résistance confirmait le désintéressement sublime de la littérature, elle accroissait au fond sa vertu et renforçait finalement la confiance que la société pouvait placer en sa capacité thérapeutique.

Suivant une troisième version du pouvoir de la littérature, celle-ci corrige les défauts du langage. La littérature parle à tout le monde, elle recourt à la langue commune, mais elle fait de celle-ci une langue propre – poétique ou littéraire. Depuis Mallarmé et Bergson, la poésie se conçoit comme un remède non plus aux maux de la société, mais, plus essentiellement, à l'ina-déquation de la langue. « Donner un sens plus pur aux mots de la tribu » : suivant *Le Tombeau d'Edgar Poe*, telle sera l'ambition de la poésie ; elle compensera l'insuffisance du langage et de ses catégories discrètes, car elle seule est en mesure d'exprimer le continu, l'élan et la durée, c'est-à-dire de suggérer la vie. Les définitions classique et romantique du pouvoir de la littérature n'ont plus cours – instruire en plaisant, atténuer la fragmentation de l'expérience –, mais un projet moderne ou même moderniste faisant de la littérature une philosophie, voire la philosophie, c'est-à-dire le dépassement du langage ordinaire.

Bergson édifia son œuvre sur le procès du langage, dont il jugeait les catégories inaptes à démêler le réel avec la subtilité requise, mais la poésie le

sauvait du pessimisme linguistique. Si l'intelligence conceptuelle échoue à épouser la vie, la littérature, elle, par l'intuition et la sympathie, sait rendre le mouvement : « Il y a [...], depuis des siècles, des hommes dont la fonction est justement de voir et de nous faire voir ce que nous n'apercevons pas naturellement. Ce sont les artistes. » L'art vise « à nous montrer, dans la nature et dans l'esprit, hors de nous et en nous, des choses qui ne frappaient pas explicitement nos sens et notre conscience ». Le poète et le romancier nous divulguent ce qui était en nous, mais que nous ignorions parce que les mots manquaient, phénomène que Bergson décrit à l'aide d'une comparaison qui peut rappeler Proust : « Au fur et à mesure qu'ils nous parlent, des nuances d'émotion et de pensée nous apparaissent qui pouvaient être représentées en nous depuis longtemps, mais qui demeuraient invisibles : telle l'image photographique qui n'a pas encore été plongée dans le bain où elle se révélera⁹ ».

Le poète dispose du pouvoir non plus archaïque, mais moderne – comme l'atteste l'évocation de la photographie –, de dévoiler une vérité non pas transcendante, mais latente, présente en puissance, tapie hors de la conscience, immanente, singulière et jusque-là inexprimable. Jouant avec la langue, la poésie déborde ses servitudes, visite ses marges, met au jour ses nuances, et l'enrichit en lui faisant violence : « La seule manière de défendre la langue française, c'est de l'attaquer », écrivait Proust à Mme Straus en 1908.

Son pouvoir moderne fait de la littérature un antidote à la philosophie, un contre-système ou une contre-philosophie. Supérieure à la philosophie, elle en prend le relais et la relance. Tout Proust est là : « Chaque jour j'attache moins de prix à l'intelligence, énonçait-il au départ de la *Recherche*. Chaque jour je me rends mieux compte que ce n'est qu'en dehors d'elle que l'écrivain peut ressaisir quelque chose de nos impressions passées, c'est-à-dire atteindre quelque chose de lui-même et la seule matière de l'art¹⁰. » Le passé mort s'incarne dans quelque sensation. De cette idée, l'écrivain se demande avec angoisse : « Faut-il en faire un roman, une étude philosophique, suis-je un romancier ? » Il conçoit la mémoire involontaire comme le lieu du vrai moi, mais le philosophe en lui bute sur cette intuition, tandis que le romancier, déplaçant les contours de la langue, nous la fera comprendre. Nous apprenant à n'être pas dupes de la langue, la littérature nous rend plus intelligents, ou autrement intelligents. Le dilemme de l'art social et de l'art pour l'art devient caduc face à un art qui convoite une intelligence du monde libérée des contraintes de la langue.

Chez les écrivains les plus exigeants du XX^e siècle, le dessein de racheter la philosophie par la littérature a longtemps prévalu. Après qu'il eut répudié le langage immédiat dont les surréalistes, par un reste de romantisme, poursuivaient le mirage, Yves Bonnefoy, comme en témoigne son *Anti-Platon* (1947), fonda son œuvre sur la haine du langage conceptuel, l'anti-platonisme visant à déjouer tout système philosophique pour vouer la poésie à la quête de la présence authentique.

Les avant-gardes théoriques elles-mêmes, malgré qu'elles en eussent, n'ont pas su renoncer au pouvoir qu'aurait la littérature d'excéder les contraintes de la langue et les cadres de la philosophie. Michel Foucault ne traite jamais

9. Bergson, « La perception du changement » (1911), *La Pensée et le Mouvant* (1934).

10. Proust, *Contre Sainte-Beuve*, 1971.

la littérature comme un dispositif de pouvoir au même titre que les autres discours. Éludant leur régime général, elle reste une référence privilégiée, située hors de la philosophie, libre des déterminations auxquelles les autres discours sont assujettis, excessive. La littérature lui servait à « [s]e débarasser de la philosophie », déclarait-il en 1975 : « Pour moi, Nietzsche, Bataille, Blanchot, Klossowski furent des manières de sortir de la philosophie. » Foucault montrait que tous les discours n'étaient que de la littérature, mais, puisque seule celle-ci assumait son statut, par une sorte d'ironie poétique elle surmontait les autres discours et conservait sa hauteur.

Quant à Roland Barthes, qui qualifia ici même la langue de « fasciste », « car le fascisme, ce n'est pas d'empêcher de dire, c'est d'obliger à dire », il ajoutait aussitôt – ce dont on s'est moins souvenu que la littérature, trichant avec la langue, trichant la langue, seule sauvait la langue du pouvoir et de la servilité, tout comme Bergson opposait le *se faisant* de la poésie au *tout fait* de la philosophie : « Cette tricherie salutaire, cette esquive, ce leurre magnifique, qui permet d'entendre la langue hors-pouvoir [...], je l'appelle pour ma part : *littérature*¹¹. »

J'ai vite traversé les trois pouvoirs de la littérature : *placere et docere*, réunifier l'expérience, ou réparer la langue. On en a parfois mésusé ou abusé, et la littérature n'a pas toujours servi de justes causes. C'est pourquoi, depuis Baudelaire et Flaubert, tant d'écrivains ont été tentés de récuser tout pouvoir de la littérature autre que sur elle-même. « À vrai dire, en art, il n'y a pas de problèmes – dont l'œuvre d'art ne soit la suffisante solution », soutenait Gide en 1902 dans la préface de *l'Immoraliste*, prônant un retour de la littérature à la littérature qui a caractérisé l'esprit de *La Nouvelle Revue française*.

Une même foi devait animer les mystiques de l'écriture qui, après la Libération et contre l'engagement, firent le choix radical de l'impouvoir, du dépouvoir, ou du hors-pouvoir, comme désaveu de toute application sociale ou morale, de la moindre valeur d'usage de la littérature, et comme affirmation de sa neutralité absolue. Vous aurez reconnu l'attitude de Maurice Blanchot, dont Foucault et Barthes ne se tenaient point trop éloignés, mais – nous venons de l'observer – sans soutenir jusqu'au bout sa rigueur nihiliste. Chez Blanchot lui-même, à vrai dire, l'éloge du neutre préservait l'exception littéraire, si bien que le quatrième pouvoir de la littérature pourrait n'avoir été qu'une variante extrême du troisième, et la pointe terrifiante du moderne.

« [L]a littérature ne permet pas de marcher, mais elle permet de respirer », prévenait Barthes¹². Il dénonçait ainsi toute compromission instrumentale de la littérature ; il condamnait tous les emplois de supplétif – pédagogique, idéologique, ou même linguistique – auxquels elle s'était successivement prêtée, mais non sans lui reconnaître encore une vertu pectorale. « Respirer » : curieusement, la dispute avec Raymond Picard sur Racine a porté sur le sens même de ce mot : y avait-il de la « respiration » lorsque Néron allait « respirer » aux pieds de Junie, ou simplement de la « détente » ? La littérature donne à respirer, comme dans le fameux air de *Pelléas et Mélisande* : « Ah ! Je respire enfin ! »

À Pékin, un fidèle de l'écriture m'objectait que le seul pouvoir de la littérature était à ses yeux de « tuer le temps ». Même si ses collègues se récrièrent, il n'avait pas tort. « Tuer le temps » : c'était l'obsession de Baudelaire, et

11. Roland Barthes, *Leçon* (1978).

12. Barthes, « *Littérature et signification* », (1963), *Essais critiques* (1964).

« la fiole de laudanum » de la fin de *La Chambre double*, « vieille et terrible amie », ou le vin des *Portraits de maîtresses*, l'aidèrent à « tuer le Temps qui a la vie si dure, et accélérer la Vie qui coule si lentement ». La lecture peut divertir, mais comme un jeu périlleux, non pas un loisir anodin.

Plus gravement, Theodor Adorno et Blanchot contestèrent qu'il fût possible de composer encore un poème ou d'écrire un récit après Auschwitz. Ils jugeaient la littérature vaine ou même coupable, qui n'avait pas empêché l'inhumain. Dès lors, l'art ne pouvait plus prétendre rédimmer l'horreur ni racheter la vie, et la littérature était frappée d'interdit. L'œuvre de Paul Celan ou de Samuel Beckett témoigne pourtant de sa poursuite exténuée au plus loin de tout vœu de pouvoir. Avec la « littérature lazaréenne », on ne rächapait plus de rien ; toute rémission ou réconfort devenait impensable. Mais quel plus bel hommage à la littérature que celui de Primo Levi, dans *Si c'est un homme*, récitant le chant d'Ulysse et racontant *La Divine Comédie* à son compagnon d'Auschwitz ?

*Considerate la vostra semenza :
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e conoscenza*¹³

Antoine Compagnon,
La littérature, pour quoi faire ? – Leçon inaugurale au Collège de France (2006)
Pluriel, 2018, p.32-55.

13. Pensez à votre conception : « vous n'avez pas été faits pour vivre comme des bêtes, mais pour suivre vertu et connaissance », *l'Enfer*, chant XXVI.

Par Françoise Détharré, professeure agrégée de lettres modernes.

Antoine Compagnon : *La littérature, pour quoi faire ?*

Si Zola attribuait à la littérature une fonction didactique, Lanson/ la jugea détrônée, au terme d'une rivalité ouverte au/ XVII^e entre lettres et sciences. Le système scolaire français pétrifia/ cette dichotomie du savoir dès 1852. Baudelaire prôna alors une/ littérature alliée à la philosophie et à la science mais// (50) préféra rapidement défendre le pré carré de la littérature moderne/. Les auteurs de la fin du XX^e s'évertuèrent cependant/ à calquer l'écriture des scientifiques auxquels ils abandonnèrent la/ préservation de l'humanisme.

Pouvons-nous encore cerner les bénéfiques/ de la lecture ? Outre son intérêt pragmatique, elle nous permet// (100) de mieux exploiter nos capacités et de gagner en rectitude/. Aristote, à rebours de Platon, assura la nécessité de la/ *mimésis* qui instruit et façonne moralement, d'autant que l'/homme la goûte naturellement. Cette conception prévalut longtemps, Prévost posa/ le roman comme indispensable pont entre connaissance et pratique de// (150) la vertu. Musil lui fit écho, soulignant la valeur d'/exemple d'une fiction, tout comme Ricœur, y voyant le/ moyen primordial d'appréhender notre être et le temps. Les/ Lumières insistèrent sur la fonction libératrice de la littérature, échappatoire/ à la chape religieuse et politique et tel fut le// (200) socle de notre école publique. Les Romantiques s'attaquèrent aux/ effets délétères du capitalisme naissant en célébrant l'unité de/ l'homme et du monde, loin de tout rapport marchand/. Occulter le réel risque néanmoins de transformer chaque lecteur en/ une Bovary. Au début du XX^e, les romanciers cherchèrent plutôt// (250) à souder et pacifier la société en la dotant d'une morale commune. La troisième fonction de la littérature est/ sacerdotale. À l'appauvrissement du langage, elle oppose l'expression/ de l'apparement indicible. Pour Bergson, l'écrivain fait sentir/ et comprendre l'obscur et le mouvant. Proust repoussa ainsi// (300) les limites de la langue pour rendre accessibles mémoire enfouie/ et profondeurs du moi. Foucault lui-même admit le pouvoir/ révélateur du langage littéraire, noble puisque se revendiquant comme tel/.

Blanchot écarta ces trois fonctions de la littérature pour lui/ assigner une « neutralité absolue ». Quoique lui niant toute valeur utilitaire// (350), Barthes lui accordait de nous insuffler un air vital, proche/ par là de la vision baudelairienne d'une littérature nécessaire/ pour supporter la vie. Après la Shoah, Adorno et Blanchot/ sonnèrent le glas de la littérature, impuissante à contrer ou/ seulement dire le mal. Levi définit pourtant l'humain en// (400) se référant, au sein de l'horreur, à Dante et/ Ulysse.

(411 mots)

SYNTHÈSE DE TEXTES

DURÉE : 4 HEURES

Vous présenterez, en 300 mots {tolérance de 10 % en plus ou en moins), une synthèse des trois textes ci-après, en confrontant, sans aucune appréciation personnelle et en évitant autant que possible les citations, les divers points de vue exprimés par leurs auteurs.

Indiquez, en fin de copie, le nombre de mots utilisés.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

Texte 1

Définissons, pour mieux les distinguer, deux choses : d'abord, les dures et les douces, je veux dire par là, d'un côté, les résidus solides, liquides et gazeux que lâchent, par les quatre éléments, les grandes entreprises industrielles ou les gigantesques décharges de déchets dont l'ignominie signe les grandes villes et, de l'autre, les images et les tsunamis d'écriture, signes et logos, dont la publicité inonde désormais l'espace rural et civique, public, naturel et paysager. Fort différentes, au moins dans l'ordre énergétique, ordures et marques résultent pourtant du même geste de salissure, de la même intention d'appropriation, d'origine animale. Certes, l'envahissement pestueux de l'espace par les signes doux n'entre pas dans les calculs physico-chimiques cités plus haut, ceux du climat, par exemple ; mais, associé à l'autre, il entre, en amont, dans une même intention. Dont voici le résultat : la pollution émane, certes, des résidus, ainsi calculables, du travail et des transformations énergétiques, mais, à l'origine, de notre volonté d'appropriation, de notre désir de conquérir et d'agrandir l'espace de nos propriétés. Qui crée des lacs de viscosités empoisonnées ou des affiches colorées s'assure que nul, à sa place ou après lui, ne s'appropriera ces lieux.

Comme un chien pisse et aboie, comme un rossignol chante, un cerf brame, un éléphant barrit... un chasseur sonne du cor, un vil dragueur siffle une femme... un fabricant répand ses produits et crie dans le plus de volume possible la publicité de leur excellence prétendue. Chacun s'expande dans l'espace. Ils pissent dans la piscine. Même le fumeur, même l'adolescent amateur du tintamarre émané de son deux-roues... crient la même affirmation de soi dans le volume ainsi envahi de volutes ou de sons : *ego, ego*, pète la moto de l'ado, révolté obéissant, puisque imitant servilement les proprios de son espace et de son temps, télé, pub et radio. Ses pets sortent d'un pot dit d'échappement, tout aussi bien nommé, je l'ai dit, que le fondement naturel ou, des vestales, la porte stercoraire¹. Inondé de pub, qui, assourdi, ne voit un anus dans le baffle d'un haut-parleur ?

1. Dans la Rome antique, porte par laquelle étaient évacuées les immondices du temple de la déesse Vesta.

Revenons au dur : telle usine laisse ses effluents couler dans une rivière proche, les diffuse dans l'atmosphère ou les transporte dans une mangrove éloignée... *nul ne voit évidemment qu'elle s'approprie ces lieux*. Il faut donc que je le montre. Qui ne comprend cependant que personne au monde ne pourra plus boire de cette eau, respirer cet air, s'approcher d'une telle aire... Voilà des endroits mieux défendus que par murs, serrures ou cadenas ! Ceux qui laissent là traces et marques, horribles, s'approprient les lieux, *non en les hantant, mais en excluant toute autre personne de là*.

Décidément, il faut méditer sur la fonction de la frontière, de cette limite sur laquelle pissent les tigres et dont parle Rousseau. Même linéaire, même abstraite, c'est-à-dire presque infiniment fine, cette *démarcation* se compose, fort curieusement, de trois épaisseurs. La première, intérieure, protège l'habitant de sa douceur ; à l'extérieur, la dernière menace, de ses duretés, les envahisseurs possibles. En celle du milieu se percent des pores, des passages, portes ou porosités par lesquelles, et souvent par semi-conduction, tel vivant ou telle chose entre, se verrouille, sort, transite, attaque, attend sans espoir... Les prépositions *dans, pour, à, de...* décrivent la première couche ; *hors et contre* la troisième bande ; *entre, vers et à travers* l'intermédiaire. Défendre, protéger, interdire ou laisser passer : ainsi, triplement, fonctionne une frontière.

Exemples : ainsi fonctionnent les murailles d'un habitat ou les cloisons d'une chambre ; ainsi fonctionnent la membrane d'une cellule, la peau, la coquille, les écailles... d'un corps ; ainsi, aussi, le corps lui-même, tout l'organisme, lui-même frontière entre deux milieux, intérieur et extérieur ; mais encore une ferme et la famille même qui l'habite et y vit, fermée, certes, mais que traverse un flux continu d'échanges, d'énergie ou de langage ; ainsi, une ville avec ses habitants, sise à l'intérieur de ses murailles, jadis, et de ses banlieues ou de son périphérique, aujourd'hui ; une nation et ses citoyens... une île, un continent, la Terre entière comme planète et les humains, ses cosmonautes, lancés sur sa boule dans l'espace... Ainsi fonctionne le monde. Et nos âmes ? Ainsi soient-elles... s'ouvrent, se ferment, rencontrent... Décrire de cette manière les frontières par lesquelles des échanges et leurs restes passent ou ne passent pas m'oblige à les nommer *ultrastructures* et à les penser universelles. Et, dans ce cas, déjà, les frontières ne se mêlent-elles pas ? Nous retrouverons plus loin ce mélange.

Revenons à l'excrément : organique et subjectif, il concerne les trois couches de telle ou telle frontière. Traversant la porte stercoraire de la bande intermédiaire, le sien propre de chacun sent bon, couvrant alors la bande intérieure, mais pour repousser tout étranger passant à l'extérieur de la troisième ; voilà les niches plus précisément décrites. Quant à la pollution dure, au sens objectif, *elle fait fonctionner surtout la troisième couche ; son horreur exclut*. Voilà qui démontre l'acte d'appropriation. La pollution douce concernerait la première bande plutôt : l'affiche invite, elle appelle et inclut. J'aurai bientôt à revenir sur le devenir de ces limites.

Nouvel argument favorable à ma thèse : la pollution croît avec la production et la consommation de biens, donc avec le nombre des riches dont, surabondamment, débordent les poubelles, dures, et les haut-parleurs, doux. La croissance parallèle de la propriété, de l'argent et du déchet montre leur communauté ; l'on se rend propriétaire par les deux derniers. Le vocable anglo-saxon *dumping* désigne une pratique commerciale où la livraison de marchandises à bas prix sur des marchés extérieurs, évoque, en précision,

une décharge publique. Tel concurrent accuse son rival d'entasser les résidus de son égout sur le marché, donc de se l'approprier. Il dit, en précision, ce que je veux dire.

Les statistiques mondiales montrent que ceux qui détiennent cette richesse ou qui la font rapidement croître polluent plus que les pauvres, et les possédants plus que les démunis, les dominants que les dominés, donc les propriétaires plus que ceux qui n'ont rien... Refusant parfois de signer les protocoles d'accord sur l'environnement, les ploutocrates se méfient même des questions d'écologie, en accusant ceux qui les évoquent de comploter contre leur développement et leurs activités.

Michel Serres,
Le Mal propre, Polluer pour s'approprier ?, Le Pommier, 2008.

Texte 2

« Je tiens pour d'autant plus humain quelqu'un qui s'éloigne de la nature », proclamait crânement André Breton. C'est peu dire que dire que l'art et la littérature du XX^e siècle, et pas seulement le surréalisme dont Breton était le pape, ont légitimé et cultivé la détestation de la nature. Les romans nombri-listes qui aujourd'hui occupent la majeure partie du champ littéraire et que les spécialistes subliment par le néologisme d'autofiction s'écrivent comme si les arbres et les animaux n'avaient jamais existé. Quant au cinéma actuel, il ne filme plus que des villes et des machines et lorsqu'il donne encore la nature à voir, c'est presque toujours comme faire-valoir pour les exploits des névrosés des records et des performances. Ce cinéma ne donne plus qu'à voir, justement, et non à admirer.

L'admiration, en effet, est une attitude antinomique avec l'activisme contemporain parce qu'elle suppose le respect, donc une certaine mise à distance d'un sujet qui ne se résout pas à tout réduire en choses. L'activisme, à l'inverse, est le mode d'existence d'un être qui a perdu jusqu'au souvenir du sens des mots « contemplation » ou « rêverie » et qui, aux antipodes de la philosophie de Descartes, se croirait ne plus exister s'il ne lui fallait que penser.

Le philosophe américain William James, fondateur du pragmatisme, a publié un recueil d'articles intitulé *La Volonté de croire*. Ne pouvant être rationnellement légitimées, les croyances peuvent néanmoins avoir un avantage pratique pour celui qui les soutient. On pourrait déduire de cette thèse l'idée que la croyance qui nous donne le plus d'avantages pratiques est la croyance en la puissance infinie de notre volonté. Le prométhéisme a d'abord pour sens l'élimination de Dieu. Freud analysait la croyance en des puissances divines comme l'effet du renoncement par l'enfant à l'illusion de sa toute-puissance personnelle. L'enfant commencerait par objectiver ce sentiment de toute-puissance issu de ses expériences organiques les plus primitives sur la personne de ses parents avant de l'attribuer à des êtres supérieurs imaginaires – les dieux. En renonçant à ce renoncement, le prométhéisme coïnciderait avec une espèce de retour à l'illusion infantile de toute-puissance.

Pour saint Anselme, seul Dieu a une volonté propre qui n'est soumise à rien d'autre qu'elle-même. Si l'homme veut quelque chose de son propre décret, il prétend de ce fait être l'égal de Dieu ; sa volonté est donc mauvaise. Si l'on

suit l'hypothèse de Freud, il n'est pas impossible que la disparition de la croyance en une toute-puissance divine – et que ne remet pas en question le prétendu « retour du religieux » – ait eu pour corollaire principal la réattribution à l'homme et par lui de cette toute-puissance. À partir du XV^e siècle, l'humanisme confère à l'homme, passé de ce fait de l'état de créature à celui de créateur, la puissance de la volonté que le Moyen Âge avait réservée à Dieu. Si l'intellect reste lié à l'ordre des choses qu'il contemple et cherche à connaître, la volonté le dépasse car elle ouvre sur un autre monde – qui est celui des actions et des œuvres humaines. Feuerbach, philosophe allemand de la première moitié du XIX^e siècle, analysera la croyance en Dieu comme l'attribution par l'être humain à un être imaginaire de qualités et de forces idéales dont lui-même du coup se trouve dépossédé. L'homme pauvre imagine un Dieu riche, l'homme malheureux imagine un Dieu dans la béatitude, l'homme faible imagine un Dieu puissant, disait Feuerbach. Or, en plaçant ainsi la richesse, le bonheur et la force hors de soi, dans un ciel inaccessible, l'homme se privait des moyens de les acquérir : voilà en quoi consiste précisément, aux yeux de Feuerbach, l'aliénation religieuse. Être aliéné, c'est ne plus s'appartenir. Ayant tout donné à Dieu, l'homme n'avait plus rien pour lui. C'est pourquoi l'homme a tué Dieu, il l'a fait pour prendre sa place et s'emparer de ses qualités. « Dieu est mort, et c'est nous qui l'avons tué ! », proclame « l'insensé » dont Nietzsche dans *Le Gai savoir* se fait le porte-parole. Renversement de la geste christique, l'assassinat de Dieu n'ouvre sur aucune résurrection, ni sur aucune promesse.

Le sentiment du beau naturel n'est pas plus naturel que n'importe quel autre sentiment. La preuve la plus simple en est l'histoire même de ce sentiment – qui commence par une absence et se poursuit et se développe en une série d'élargissements successifs. Il semble que le sens du surnaturel – universellement constatable – a pu constituer un obstacle majeur : lorsque l'on perçoit dans la nature une force suprahumaine, donc, dans une large mesure, inhumaine, – et tel est le cas observable dans toutes les cultures traditionnelles – la beauté n'est du coup pas la qualité que l'on est conduit à reconnaître de manière immédiate. Pour que la beauté de la nature soit perçue comme telle, il faut que l'humain ait remplacé le divin dans la hiérarchie des valeurs. On comprend dès lors pourquoi les premiers poètes européens de la nature – Rousseau et les lakistes² – sont les exacts contemporains de la première révolution industrielle : leur amour de la nature se porte sur quelque chose qui commence à être détruit par le travail industriel des hommes.

La mort de Dieu ne signifie pas la fin des croyances religieuses, mais la disparition d'une civilisation fondée sur des valeurs religieuses. Au diagnostic/pronostic de Nietzsche est communément opposée l'objection du contexte protestant de la naissance et du développement du capitalisme. Aujourd'hui encore, la société américaine apparaît à beaucoup comme profondément religieuse. Mais la bigoterie n'empêche pas que le système capitaliste, ainsi que les technosciences qui lui impulsent son formidable dynamisme, sont foncièrement athées. La religion (ainsi que la morale : c'est pourquoi celle-ci a été remplacée par l'éthique) représente un verrou inacceptable pour une

2. Formé à partir de l'anglais *lake* (lac), le terme désigne des poètes de la première génération romantique (fin du XVIII^e et début du XIX^e siècle) qui ont fréquenté et évoqué dans leur œuvre le Lake District dans le nord-ouest de l'Angleterre.

volonté de domination et de conquête infinies. Il n'y a pas de religion sans secret ni mystère – qui sont la part réservée du surnaturel. Les seuls secrets que le capitalisme admette sont les secrets de fabrication, nécessaires dans un régime de concurrence, et les secrets militaires, nécessaires dans un monde de rivalités.

L'une des plus belles ruses de la raison économique – la plus réussie peut-être – fut la connivence qui associa pendant plus d'un siècle les deux idéologies ennemies du libéralisme et du communisme historique. Un même optimisme prométhéen les animait toutes deux. Les Américains partirent à la conquête de l'Ouest, les Russes à celle de l'Est (la Sibérie), leur direction était inverse mais leur objectif était le même. Dans les années 1930, avant de se retrouver alliés contre Hitler, Roosevelt et Staline faisaient construire dans leurs pays respectifs les mêmes grands barrages. La technique et l'économie modernes n'ont pas de patrie. Dans les années 1960, ce qui a été désigné par l'expression emphatique, au risque de la paranoïa publiquement admise, de « conquête de l'espace », a présenté un autre parallélisme troublant entre l'Est et l'Ouest. Le saccage de l'environnement dans l'ancienne Union soviétique reste la trace de ce qui ne fut même pas un triomphe industriel.

Christian Godin,
La Haine de la nature, Champ Vallon, 2012.

Texte 3

Selon Aubrey de Grey, qui dirige la Fondation Methuselah (institut de gérontologie de Mountain View, Californie), le corps humain est comme une voiture dont il suffira de remplacer les pièces pour la conserver indéfiniment. La vie n'est en fait qu'une question de maintenance. L'homme n'aura donc plus besoin d'assurer aucune de ses fonctions animales. La naissance ? Ce sera la fin de la naissance, grâce aux perspectives ouvertes par le clonage et l'ectogenèse – c'est-à-dire la procréation complète d'un être humain dans un utérus artificiel. La maladie ? Ce sera la fin de la maladie, grâce aux biotechnologies et à la nanomédecine. La mort ? Ce sera la fin de la mort, grâce aux techniques d'*uploading*, c'est-à-dire au téléchargement de la conscience sur des matériaux inaltérables dont les puces de silicium ne sont que la préfiguration. L'expression « mort naturelle » n'aura plus aucun sens. La philosophie transhumaniste est certes liée circonstanciellement au formidable progrès des biotechnologies (génomique, génie génétique, transgénèse³, etc.) dans la Californie des années 1980. Mais le développement de l'utopie s'est inscrit dans le contexte intellectuel de la Modernité décrite ci-dessus dans l'introduction. On peut le caractériser plus particulièrement par cinq traits.

Ce milieu hérite de la contre-culture libertaire des années 1970 marquée par le triomphe de l'hédonisme (« vivre sans temps morts, jouir sans entraves ») et l'empire des droits individuels (« il est interdit d'interdire »). Après avoir

3. C'est-à-dire l'implantation de gènes dans un organisme vivant. Ainsi transformé, il devient un Organisme Génétiquement Modifié (OGM). [Note de l'auteur]

traversé la philosophie libertaire, l'idéologie libérale de la nouvelle économie biotech devient libertarienne⁴.

C'est un milieu intellectuel athée. Cela implique la levée des grands interdits traditionnels pesant sur la vie humaine (eugénisme, IVG, manipulations génétiques, etc.), l'effacement de la croyance en l'unicité de l'humanité au sein de la « Création » (l'homme n'est plus conçu comme « un empire dans un empire », il est « un animal comme les autres »), l'effondrement de la foi en l'immortalité de l'âme et en la possibilité du salut ou de la damnation éternelle : la damnation est ici-bas, c'est l'inéluctable vieillissement ; et c'est sur terre qu'il faudra se sauver et devenir immortel.

Cette utopie naît au moment où la biologie détrône la physique comme science reine. Le XX^e siècle fut le siècle de la physique (relativité générale, mécanique quantique), dont les théories furent liées à quelques grandes peurs (notamment celle de la bombe atomique) ; le XX^e siècle est celui de la biologie moléculaire, de la biologie génétique et de la biologie évolutionniste, dont les théories sont liées à quelques peurs (manipulations génétiques) et aux grands espoirs (génie génétique) qu'elles suscitent dans les sciences médicales.

Du point de vue métaphysique, cette utopie repose sur un monisme matérialiste (toute la nature n'est faite que d'une seule substance) et, du point de vue épistémologique, elle se fonde sur une conception mécaniste de la vie : les propriétés du vivant sont réductibles à celles de ses matériaux.

Transhumanisme et posthumanisme supposent donc une triple réduction conceptuelle : des propres de l'humanité (conscience, intelligence, langage) à l'animalité ; de l'animalité au biotique (biotechnologies) ; et du biotique au mécanique. Inversement, cette réduction implique une triple possibilité de constructivisme technologique : on peut créer du vivant à partir du mécanique ; de l'animalité à partir du biotique ; et simuler de l'humain par l'informatique (langage), l'intelligence artificielle (intelligence) et les neurosciences (conscience). Par induction, on peut donc aussi entreprendre une quatrième construction, la fabrique technologique du transhumain (amélioration de l'humain) et du posthumain (dépassement de l'humain). CQFD.

Pourtant, on a plusieurs raisons philosophiques de douter que l'homme perdra un jour le contrôle des machines ou que l'ordinateur pourra remplacer le cerveau.

Ces croyances se fondent sur l'idée que le fonctionnement de l'esprit humain s'expliquerait comme celui d'un ordinateur, par un ensemble d'algorithmes. Il pourrait donc être répliqué sous forme informatique. Pourtant, ce n'est pas le cas. On se représente la pensée et le corps comme totalement séparables. Mais il y a un fossé entre la machine et l'homme qui tient justement à son animalité. Descartes le disait déjà : l'âme n'est pas dans son corps comme un pilote dans son navire. Je n'ai pas un corps comme on a une voiture ; mon esprit et mon corps forment un tout indécomposable. Quand mon corps

4. Rappelons que le « libertarisme » (ou « libertarianisme ») est une philosophie politique fondée sur une réduction de l'État à ses fonctions régaliennes (justice, police), et donc à la protection des droits absolus de l'individu (liberté et propriété, sur soi-même et sur ses objets), que ce soit sur le plan économique, social ou moral. Son théoricien le plus connu est Robert Nozick. Cette tendance politique est peu représentée en Europe, où les champions du libéralisme économique défendent souvent le rôle réglementaire de l'État en matières de mœurs (consommation de drogues, usages de son corps, prostitution, euthanasie, etc.) alors que, inversement, les défenseurs d'une permissivité dans le domaine des mœurs sont souvent en faveur de l'interventionnisme économique de l'État et de son rôle redistributeur en matière sociale. [Note de l'auteur]

a une lésion, je ne la constate pas comme on remarque de l'extérieur une panne de voiture : j'ai mal. C'est *moi* qui souffre, non un corps étranger. Il est concevable et techniquement réalisable de fabriquer une machine si intelligente qu'elle batte le champion du monde de go. Mais il est techniquement irréalisable et même inconcevable de fabriquer une machine qui aurait mal aux dents. Les calculs les plus difficiles se passent de conscience, parce qu'ils se passent de corps, mais non le mal de dents, la nausée ou le sentiment d'humiliation. L'incarnation de la pensée dans un corps se manifeste dans les états de la conscience qui passent pour inférieurs : douleur, plaisir, émotions. Notre intelligence n'est pas une aptitude au calcul, c'est une intelligence de situation. Notre raison n'est pas une capacité logique, c'est une disposition dialogique qui se forge dans le rapport à autrui. Nous sommes donc « rationnels » parce que nous sommes des animaux vivants. Nous sommes peut-être des « animaux comme les autres », mais c'est en cela que nous ne sommes pas des machines : notre humanité est une fonction de notre animalité, qui est elle-même un ensemble de fonctions de la vie et du vivant comme tel.

Francis Wolff,
Trois utopies contemporaines, Fayard, 2017

CORRIGÉ

Par Gilbert Guislain, professeur de culture générale, interrogateur en classes préparatoires EC à Paris, correcteur aux concours.

RÉUSSIR UNE SYNTHÈSE

La synthèse proposée à l'ESCP se réalise en 300 mots plus ou moins 10 pour cent, en quatre heures. Un titre général ouvre la synthèse, sous forme d'une question montrant qu'on a compris l'objet du débat. Il n'est pas nécessaire de conclure par deux lignes comme on le faisait autrefois pour « repositionner » les auteurs. Chaque paragraphe doit se livrer à une confrontation serrée entre les trois auteurs, et s'ouvre aussi par une question à valeur d'annonce directrice. Cette question n'est pas à souligner, on ne souligne que les titres d'œuvres, sans guillemets. Chaque point de confrontation doit citer plusieurs fois les auteurs pour faire savoir au lecteur qui pense quoi. Le plan doit être progressif. Ici, à propos de la communication politique, on examine successivement les protagonistes du débat, les traits de la communication politique, et enfin la vérité portée par cette communication. Il s'agit donc de trois « coups de sonde ». Ce ne sont pas évidemment trois résumés successifs qui sont demandés, mais trois aspects d'un débat global qu'il faut identifier. Le souci essentiel est celui de la confrontation, tout ne peut être rendu exhaustivement, il faut exprimer l'essentiel, laisser encore plus d'éléments de côté que dans la contraction demandée à HEC – la réduction est donc plus nette. Il convient aussi de restituer « objectivement » le débat, c'est-à-dire de s'abstenir de tout commentaire extérieur aux textes et ne pas forcer le sens, tout en faisant apparaître réellement la position de chacun, sans consensus artificiel. Montrez que tel texte diffère des autres... Ce qui requiert du jugement.

Nous conseillons de lire dans un premier temps les textes sans se précipiter dans une prise de notes. Ensuite, cette dernière permet de discerner l'essentiel du contenu de chaque texte tout en gardant l'ensemble à l'esprit. Chaque texte prend son sens dans les grands traits de l'ensemble. La prise de notes sur chaque texte ne doit pas se faire « en aveugle », il faut, dès le début du travail, dégager des liens d'un texte aux deux autres et peu à peu songer au plan de la synthèse, qui n'est pas créé magiquement à la fin. On envisage des parties possibles de plan, des points successifs d'intérêt croissant. Progressif et évolutif, modifiable, le plan s'élabore au fil de l'étude des textes, sur une feuille séparée. Il ne faut pas recourir à un plan type, mais on peut recourir à des types de plan. Il n'est pas nécessaire de commencer par l'étude du premier texte, mais par celui qui vous fait dominer le plus facilement l'ensemble, celui qui vous sert de « pivot ».

Plusieurs types de plan peuvent être envisagés : comparatif (convergences et divergences) dialectique (thèse antithèse) analytique (origine ou historique du sujet, conséquences, perspectives). L'énonciation doit être indirecte : dire « tel auteur dit que » est de règle, alors qu'en contraction vous êtes l'auteur. Concentrez-vous sur les passages difficiles pour éviter tout contresens.

Les éléments retenus de chaque texte doivent être insérés dans le plan qui se construit parallèlement. Prenez garde à toute approximation dans la restitution des thèses de chacun, car il ne faut pas confondre les thèses rapportées par tel auteur et le jugement qu'il porte lui-même. C'est une culture approfondie dans le domaine de l'histoire des idées et des débats qui vous permettra de mieux situer le point de vue des auteurs.

Réussir une synthèse, ce n'est donc ne pas seulement appliquer une méthode, c'est aussi être sensible à la dimension culturelle d'un débat. Il est surtout nécessaire de bien connaître le mouvement des idées contemporaines (neuvième point du programme d'histoire de la pensée en première année) pour les débats du moment auxquels se rattachent les textes à contracter ou à synthétiser. Il faut pratiquer une veille culturelle permanente et ne pas se limiter à la lecture de quelques philosophes.

Enfin, quelques conseils stylistiques : de même qu'il faut éviter les résumés successifs, les contractions juxtaposées, le collage de citations hors contexte, les formulations confuses sans mention du nom des auteurs, les fausses symétries, il faut se garder des phrases trop longues et surchargées, maladroites et allusives, des amalgames anonymes... N'utilisez pas de parenthèses ou de numéros, évitez les « monsieur ou madame », veillez surtout à l'orthographe des noms propres. La rédaction travaillée et achevée doit être rigoureuse (syntaxe, lexique précis et orthographe : ménagez-vous un temps de relecture !) Un mot oublié et c'est toute une phrase qui devient incompréhensible, ce qui peut compromettre le résultat final.

Examen des textes

Comment aborder ce corpus de textes ? La connaissance du mouvement des idées contemporaines constitue le neuvième point du programme de culture générale des classes préparatoires EC qui ne saurait se réduire à Platon, Kant et Lacan, mais mener à la maîtrise de débats que le candidat retrouvera à l'oral. Pour ce faire, nous conseillons la lecture de *Cent Fiches de culture générale* (Bréal) ou bien encore les vidéos de Studyrama sur les thèmes de culture générale : espace, société, corps, etc. Les candidats

du concours 2021 composeront sur le thème de l'animal et les antithèses spécisme-antispécisme, mécanique-organique lui seront familières. Chacun doit connaître les intellectuels favorables à l'écologie en distinguant écologie profonde et simple environnementalisme. Parmi les esprits favorables à l'écologie, figure Michel Serres, récemment décédé et auteur du *Contrat naturel*, plaidoyer pour une entente entre l'homme et le vivant. Son texte paraît théorique et complexe, notamment dans sa réflexion sur le concept de frontière et même s'il apparaît en premier, la stratégie du candidat peut le mener à l'aborder en dernier, à la lumière des deux autres. Il est possible de commencer peut être par l'examen du troisième, celui de Francis Wolff, extrait de *Trois utopies contemporaines*, bien relié à l'histoire des idées et relatif au corps et au transhumanisme dans un débat qui ne saurait être étranger aux étudiants. Ceux-ci ne connaissent pas néanmoins F. Wolff, professeur à l'ENS et défenseur de la corrida, à la différence de Michel Onfray (*Cosmos*) et d'une majorité d'intellectuels. Philosophiquement, il distingue l'animalisme et le transhumanisme mécaniste, classé comme utopie contemporaine ; l'humanité est pour lui source de toute valeur. Son propos apparaît ici comme un réquisitoire contre ce transhumanisme mécaniste dans un débat bien connu, où interviennent Laurent Alexandre, Luc Ferry, J.M. Besnier, Alain Finkielkraut...

Le second texte semble proche du précédent. Il se distingue par l'accent mis sur la perte de la transcendance religieuse. L'auteur, Christian Godin auteur de *la Haine de la nature*, montre dans son œuvre que les hommes se sont écartés de la nature et ont tout artificialisé, au détriment de l'environnement – ceci malgré le *greenwashing* du capitalisme vert et dans une volonté de pouvoir, ce qui rejoint le point de vue de Michel Serres...

Les domaines de réflexion des trois textes sont assez différents : nature, culture, art, technique, pouvoir, religion, corps, âme, frontière et il est difficile de percevoir une unité, les lignes de force dans cet ensemble alors qu'en revanche le sujet de l'an dernier s'articulait autour d'un thème central, la communication politique. Comme l'indiquent les indispensables ouvrages de méthode (*Réussir la synthèse de textes*, Gilbert Guislain et Claudia de Oliveira Gomes Studyrama et *Exercices de contraction de textes*, Gilbert Guislain et Yves Terrades, Ellipses) le travail consiste à relever les éléments importants de chaque texte tout en ayant à l'esprit l'essentiel des deux autres textes et en envisageant des plans, ou du moins des parties de plans possibles. Le plan choisi doit être progressif et mettre en évidence les divers aspects du débat.

Prise de notes sommaire sur chaque texte :

Texte de Michel Serres :

Notre civilisation produit des déchets, organiques et industriels, des ordures
Même la publicité faite de signes « doux » est un vomissement issu de cette civilisation

La nature comme la culture – peut être déguisement de la nature – procèdent à de la défécation

Tout est donc corps

La pollution est l'expression d'une volonté de pouvoir, nous nous approprions l'espace par nos rejets

Parallélisme des bruits et des excréments

Avec les déchets durs et industriels, nous sommes dépossédés de notre environnement naturel

L'accent est mis sur le rôle des frontières, définissant les divers espaces et présentes dans la nature comme dans la culture. Système d'ouvertures et de fermetures. Unité et porosité organique

Dans le monde contemporain, l'argent va de pair avec la propriété et la production de déchets

Les possédants sont les plus gros pollueurs

Opposition de l'écologie au modèle dominant d'appropriation

Texte de Christian Godin :

L'art contemporain est écart par rapport à la nature : exemple du roman et du cinéma privilégiant villes et machines

Opposition entre l'admiration de la nature et sa réification, fruit de l'activisme humain

Rôle de la volonté, du « prométhéisme » ; l'homme veut se faire l'égal de Dieu. Cf. constructivisme évoqué par Wolff. Il en résulte une élimination de la transcendance

L'action prônée par les Lumières implique un retrait du divin, la promotion d'un pouvoir humain

Idée de la mort de Dieu, fin des valeurs religieuses avec le capitalisme et les technosciences malgré la dimension apparemment religieuse des États-Unis

La domination humaine s'oppose à la religion, par essence supérieure et surnaturelle

Antithèse entre la beauté de la nature et la naissance du monde industriel à la fin du XVIII^e siècle

Égal productivisme américain et soviétique. Antithèse marxisme écologie

Texte de Francis Wolff :

Examen du transhumanisme

Philosophie mécaniste du corps, abolition des limites

Tout est vivant : il n'y a plus ni naissance ni mort. Âge de la biologie

Genèse du transhumanisme : années 1970

Hédonisme, philosophie du plaisir, rôle des libéraux libertaires

Athéisme : absence de transcendance divine

L'homme dans la nature : effacement de l'anthropocentrisme

Matérialisme, idée d'une amélioration du devenir terrestre humain

Réduction de l'humanité à l'animalité, philosophie mécaniste et constructiviste

Règne des machines et du numérique

Idée transhumaniste d'une séparation entre l'âme et le corps

Or, il existe une unité des deux, toute pensée est incarnée dans un corps

L'intelligence est en situation, liée aux émotions et à la conscience

Notre animalité fait que nous ne sommes pas des machines

Proposition de corrigé

De la désacralisation de la nature au transhumanisme ; quel pouvoir humain ?

De quelle nature parle-t-on ?

Trois philosophes, Michel Serres, Christian Godin et Francis Wolff s'interrogent sur la domination de la nature par la technique et sur le devenir humain. Pour Serres, tout est nature, unité organique et porosité, production de matière, jeu de frontières, d'ouvertures et de fermetures. Selon Wolff qui examine le transhumanisme, tout n'est pas manipulable comme on le croirait avec l'intelligence artificielle dont il réfute la crédibilité puisque toute pensée est liée à notre nature, incarnée dans un corps. Notre animalité fait que nous ne sommes pas des machines. Godin insiste surtout sur le pouvoir humain, sur une nature extérieure désormais réifiée, d'où la réaction romantique. Le productivisme règne sans frontières à l'Ouest comme à l'Est, en antithèse à l'écologie.

Comment l'homme exerce-t-il son pouvoir ?

C'est par la pollution, – produit d'échappements divers – généralisée, même séductrice et publicitaire que ce pouvoir s'exerce pour Serres. Nous nous approprions l'espace par nos rejets comme les animaux. Plus historien, Godin évoque la modernité, l'homme égal de Dieu, l'esprit prométhéen, la marginalisation du sens esthétique et religieux. Wolff constate cette même absence de transcendance divine, le progrès du matérialisme et le glissement du pouvoir sur la nature au pouvoir sur l'homme, par les technologies et le transhumanisme.

Quel engagement dans ces réflexions ?

Partant du lien de la pollution au pouvoir, Serres met sévèrement en cause les industriels, les marchands tout comme l'oligarchie possédante. Godin révèle le matérialisme contemporain qui oublie la nature tout comme Wolff qui note le recul de l'anthropocentrisme humaniste classique. Il dissèque lucidement et sans concessions les composants de l'utopie transhumaniste : philosophie hédoniste, libertaire et règne du numérique. Gain illusoire du droit et du bonheur, perte de l'humanité.

(310 mots)

HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

SUJET

DURÉE : 4 HEURES.

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il est rappelé que la carte réponse est à remplir. Les documents d'accompagnement ci-joints sont essentiellement là pour aider le candidat dans sa réflexion sur le sujet posé et sa représentation cartographique. Aucun document n'est autorisé ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

ESCP
BS

SUJET

La France dans la recomposition des puissances dominantes

CARTE : en utilisant vos connaissances et si nécessaire les documents ci-joints, construisez une carte appuyant et illustrant vos propos. La légende ne devra pas faire plus d'une page. Il est rappelé que **la carte est obligatoire**. Elle doit également comporter un titre.

Sommaire

Document 1 : Les 20 premiers pays par le montant de la Recherche & Développement en 2018

Source : R&D. Global R&D Funding Forecast 2018, p. 5.

Document 2 : Quelques indicateurs comparatifs de la compétitivité des États selon le World Economic Forum

Source : *Cahiers français*, nov.-déc. 2019, n° 413, p. 89.

Document 3 : La ZEE sous juridiction française (situation en 2017)

Source : Service hydrographique et océanographique de la Marine (SHOM).

Document 4 : Visite d'État du Président Emmanuel Macron en Chine, le 9 janvier 2018

Source : *Diplomatie*, avril-mai 2018, p. 63.

Document 5 : Les empires coloniaux en 1914

Source : Questions internationales. Un bilan du xx^e siècle, *La Documentation française*, n° 52, nov.-déc. 2011, p. 53.

Document 6 : Déploiement des forces françaises hors métropole

Source : *Diplomatie*, Les grands dossiers n° 44, Géopolitique de la France, avril-mai 2018, p. 81.

D O C U M E N T S

Document 1. Les 20 premiers pays par le montant de la Recherche & Développement en 2018

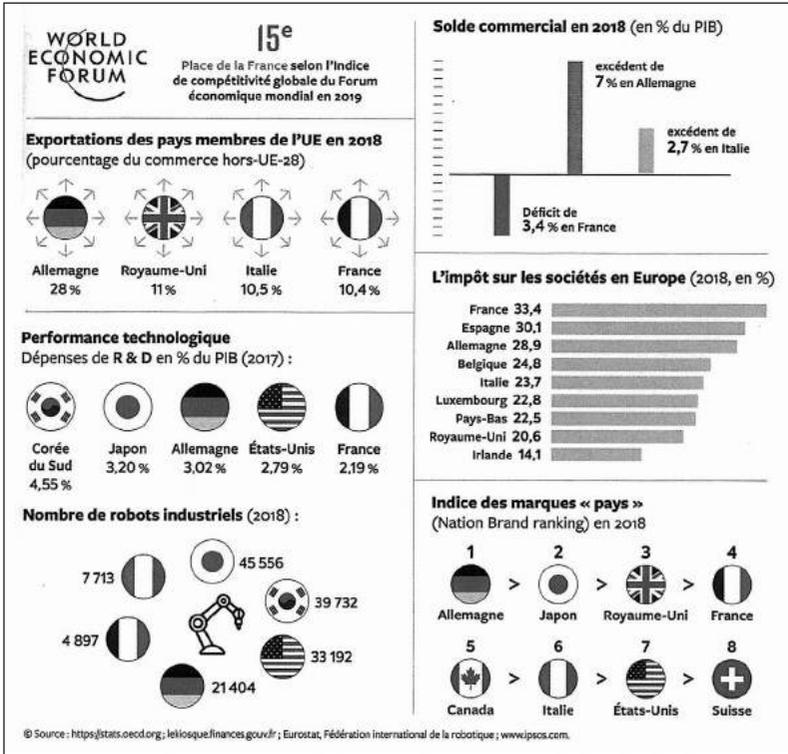
Source: R&D. Global R&D Funding Forecast 2018, p. 5

	Pays	R&D (en milliards de \$)	PNB (a) (en milliards de \$)	R&D/PNB (en %)
1	États-Unis	552,98	19 471,0	2,84 %
2	Chine	474,81	24 102,0	1,97 %
3	Japon	186,64	5 332,0	3,50 %
4	Allemagne	116,56	4 104,0	2,84 %
5	Corée du Sud	88,23	2 042,0	4,32 %
6	Inde	83,27	9 796,6	0,85 %
7	France	63,12	2 805,5	2,25 %
8	Russie	58,62	3 856,7	1,52 %
9	Royaume-Uni	49,61	2 884,3	1,72 %
10	Bésil	37,45	3 200,8	1,17 %
11	Australie	31,47	1 748,3	1,80 %
12	Canada	29,50	1 260,5	2,34 %
13	Italie	28,84	2 270,9	1,27 %
14	Taiwan	28,74	1 173,1	2,45 %
15	Espagne	22,27	1 767,2	1,26 %
16	Pays-Bas	18,98	903,7	2,10 %
17	Suède	18,94	2 104,9	0,90 %
18	Turquie	17,44	523,8	3,33 %
19	Suisse	15,22	510,9	2,98 %
20	Singapour	13,53	516,5	2,62 %
	Reste du monde	73,08	17,715	
	Total Monde	2 189,63	122 859,63	

(a) Le PNB est ici calculé en parité de pouvoir d'achat.

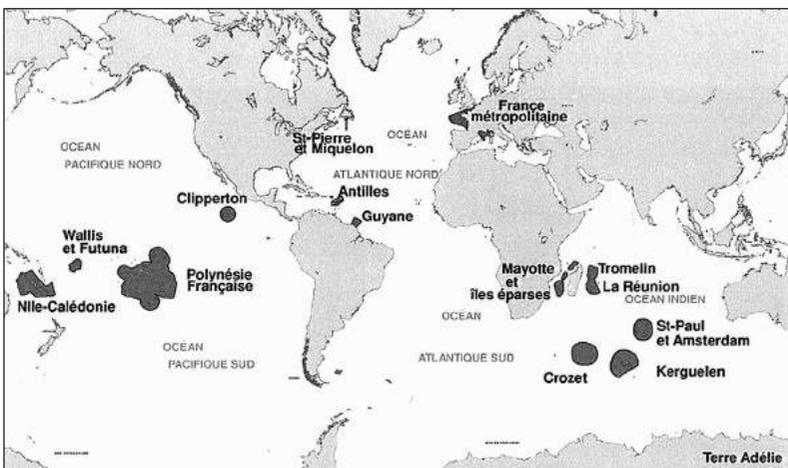
Document 2 : Quelques indicateurs comparatifs de la compétitivité des États selon le World Economic Forum

Source : Cahiers français, nov.-déc. 2019, n° 413, p. 89.



Document 3 : La ZEE sous juridiction française (situation en 2017)

Source : Service hydrographique et océanographique de la Marine (SHOM).



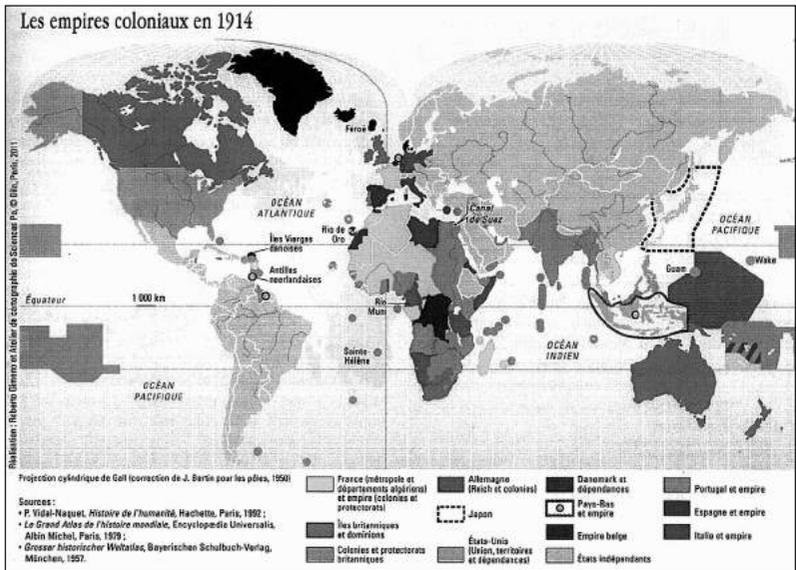
Document 4 : Visite d'État du Président Emmanuel Macron en Chine, le 9 janvier 2018

Source : *Diplomatie*, avril-mai 2018, p. 63.



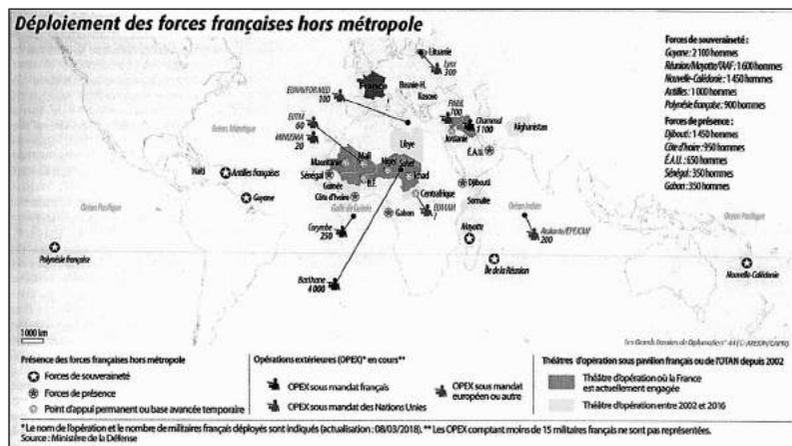
Document 5 : Les empires coloniaux en 1914

Source : Questions internationales. Un bilan du xx^e siècle, *La Documentation française*, n° 52, nov.-déc. 2011, p. 53.



Document 6 : Déploiement des forces françaises hors métropole

Source : *Diplomatie*, Les grands dossiers n° 44, Géopolitique de la France, avril-mai 2018, p. 81.



CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur de chaire supérieure.

La France dans la recomposition des puissances dominantes

→ Et si la France faisait son grand retour ?

Déjà au menu de Ecricome (*influence française en Europe*), elle réapparaît donc pour l'épreuve commune ESCP HEC sans parler de l'ESH Essec qui se demandait si « *le modèle français était à bout de souffle* » ! Signe des temps on remarquera que les 3 sujets s'interrogent sur la puissance, le modèle et le déclin (isme) français. En 2020 la préoccupation est donc bien de penser si la France cette puissance moyenne à vocation mondiale (Valéry Giscard d'Estaing, R Debray et tant d'autres) peut assumer son rang, et lequel ? si elle est puissance du passé... dépassée, ou puissance capable de se remobiliser aux côtés des PITA et repasser dans la cour des grands ?

→ Plusieurs sujets dans ce sujet : le risque de tronquer la réflexion exigée ?

La France désigne un territoire, un État-nation, un peuple, et un héritage, un art de vivre, un projet de société. Appelée à transmettre un message souvent universaliste et dominateur (« *la France n'est véritablement elle-même qu'au premier rang !* » de *Gaule*). S'interroger sur la France dans la recomposition des puissances dominantes s'inscrit donc dans un étalonnage de ce rôle dans le contexte des défis actuels.

- La France peut-elle appartenir raisonnablement aux puissances dominantes et ce suivant quels critères au regard de ses performances contrastées (R&D, enseignement, socle industriel, leadership, indice de qui mesure son rôle dans des coalitions) ?

- La France a-t-elle des relations nouvelles fécondes ou conflictuelles avec des puissances dominantes d'aujourd'hui identifiées comme telles (France/Chine France/États-Unis). La France peut-elle fixer un cap des priorités au-delà des injonctions de ces puissances ?
- La France dans le strict cadre européen ne peut-elle apparaître au même titre que l'Allemagne comme puissance dominante et à l'heure du Brexit des crises sanitaires et de la dette ou des crises du projet européen, refaire du couple franco-allemand en revisitant certains de ses terrains d'affrontements (endettement déficit budgétaire défense européenne mutualisation des dettes) une courroie de transmission du renouveau indispensable de l'Europe.
- La France dans certains espaces comme les empires coloniaux ou des zones circonscrites par le legs de l'Histoire (quelques pays du sous-continent latino-américain) a pu et peut jouer un rôle de puissance dominante. N'est-elle pas condamnée à recomposer, reformater son rôle sous la pression de l'émergence de certains pays, de l'irruption de nouveaux acteurs économiques (Chine, EU) ou politiques (nébuleuse de l'islamisme radical).

➔ Des incertitudes... fantasmées sur le cadre chronologique ?

- L'absence de chronologie mais la carte des empires coloniaux invitait à adopter une dimension chronologique faisant une place aux héritages mais en prenant soin de surtout évaluer ce qu'il en reste et la façon dont la France peut les remobiliser pour ne pas être reléguée ou rester dans le camp des puissances dominantes.
Il n'était peut-être pas inutile de resituer à l'occasion de développements la place de la France dans le bilatéralisme est/ouest, face à l'unilatéralisme américain post désintégration de l'ex URSS en 1991 acmé de la puissance américaine.
- Mais le sujet pouvait surtout cibler les 3 dernières décennies, l'installation d'un monde multipolaire et d'un système international qui vit au rythme d'un multilatéralisme en décomposition d'un « minilatéralisme » où les places sont chères ou d'un polylatéralisme qui attend de passer de la théorie à la réalité !!!

➔ Comment composer sur la « recomposition »... des « puissances dominantes »

• La notion de recomposition

Elle paraissait inviter à analyser la nouvelle hiérarchie mondiale des pays depuis les années 2000 sous les effets conjugués :

- des émergences, des « réémergences », des basculements (asiatique) ou printemps (africains prophéties auto-réalisées ou réalité sous-jacente ou pas) ;
- des déclinés programmés ou proclamés sans beaucoup de certitudes ;
- de nouvelles priorités (recherche nouvelles technologies Intelligence artificielle dans la 3^e voire, 4^e révolution industrielle pour K. Shwab) redistribuant les rapports de force ;
- de nouveaux défis (réchauffement climatique, inégalités, épuisement des ressources mais aussi lutte contre les terrorismes).

Et globalement l'apparition de facteurs de domination qui n'ont rien à voir avec le territoire puisque finance et technologies supplantent ressources et séparées aux transfrontaliers supplantent des maillages nationaux.

Le contexte est favorable avec la crise du multilatéralisme à ressortir les instruments de mesure de la puissance et proposer d'étalonner la France dans ses rapports avec des puissances dominantes ou dans son éventuel statut de puissance dominante.

• **La notion de puissance dominante**

Faut-il reconvoquer F. Perroux et son concept d'économie internationalement dominante... le candidat pouvait interpeller cette notion que F. Gerbier réactive en récapitulant les attributs d'une EID : Pour F. Perroux, une Economie Internationalement Dominante est une économie dont la structure nationale s'impose au monde de manière asymétrique comme centre de conjoncture autonome ; Et Qui exerce sur l'environnement des effets d'entraînement et des effets de stoppage, au cours d'une durée cyclique.

Il lui voit trois constituants principaux :

- la dimension, géographique, humaine, mais surtout économique et civilisationnelle par sa place dans la production, le commerce et la finance internationaux ;
- la force contractuelle qui ne s'arrête pas à la puissance économique mais, au contraire, découle de sa puissance militaire, maritime et diplomatique et lui donne une puissance stratégique ;
- une position internationalement dominante qui lui donne la responsabilité et la charge (financière et militaire) d'organiser le monde selon une règle du jeu qui, tout en lui étant bien évidemment favorable, sera capable de diffuser le dynamisme et le progrès à l'ensemble de la zone contrôlée et dominée.

Nul doute que le tableau ainsi dressé n'était pas suffisant pour traiter le sujet car on pressent derrière cette notion, plutôt l'hyperpuissance solitaire américaine que la France d'hier et encore moins d'aujourd'hui.

On ne peut se contenter de la Triade notion des années 1985 qui désigne les trois pôles qui dominent l'économie mondiale le Japon, la CEE (composée de dix membres) et les États-Unis à moins d'en voir le casting actuellement l'Asie orientale, l'Union européenne – ou l'espace économique européen – et l'Amérique du Nord, et de ne pas se limiter à considérer que pour la France l'UE est un multiplicateur de puissance (suffisant ou limitée).

- Inutile peut être de convoquer Charles Kindleberger et sa théorie de la stabilité hégémonique qui montre que l'économie mondiale a besoin d'une puissance dominante pour son bon fonctionnement libéral : celle-ci va garantir la fluidité mondiale, définir des normes de sanctions et dispose d'une panoplie de moyens de pression.
- Le concept de **puissance structurelle** développé par Susan Strange ouvrait des pistes même si il était décalé : il désigne cette capacité nouvelle selon elle de déterminer la façon dont seront satisfaits les 4 besoins sociaux de base : sécurité, savoir, production, finance, une puissance donc a-territoriale essentiellement économique et une définition qui ne règle pas la question comment classer les puissances structurelles et quelles sont les puissances dominantes.

Lançons-nous après tant de précautions :

une Puissance dominante est donc

- celle qui impulse l'économie mondiale, dont les changements de modèle de croissance animent des cycles ;
- celle qui suscite et dirige des alliances, est capable d'exercer un soft un smart ou à défaut un sharp power pour contrôler et déstabiliser tout adversaire potentiel ;
- celle qui anticipe dans ses choix économiques et sociaux des mutations ;
- celle qui est capable de vivre un déclin comme un impérieux besoin de se réinventer ;
- celle qui a à la fois la capacité et la volonté d'exercer sa domination par des armes multiples qui s'appellent innovation, productivité, le taux d'épargne, consensus social et degré d'éducation ;
- celle qui feint de ne pas douter surtout à l'aulne de l'ouvrage de Fukuyama sur les sociétés de confiance capable de se mobiliser.

• À lire ce CV (curriculum vitae) d'une puissance dominante on voit que peu d'élus existent mais que les prétendants sont nombreux

- suivant les époques (Ex Urss autant que EU et le siècle américain, la Chine avant même 2049 puissance dominante qui se refuse à l'assumer mais qui prétend avec ses propres caractéristiques jouer un rôle décisif dans le concert des nations) l'UE et sa force sans puissance et pourquoi pas la France elle qui est porteuse des héritages des Lumières qui est patrie des droits de l'Homme, qui est la cheville ouvrière de la construction européenne, qui a participé à l'émancipation des provinces américaines (la Fayette) et dont Jefferson pouvait dire « chaque homme a deux patries la sienne et la France » Si peu d'observateurs se sont étonnés du moins dans l'immédiat après la Seconde Guerre mondiale du rôle international de la France c'est bien parce que au-delà de la victoire d'une France contre la dictature, l'Histoire de la France traçait la route d'un universalisme occidental... bien sûr tout cela est à relativiser aujourd'hui !
- suivant les régions à une autre échelle où a minima de nombreux acteurs exercent leur puissance (Afrique du Sud sur le continent noir, Brésil sur le cône sud latino-américain, ou le Japon sur le Pacifique hier comme aujourd'hui).

NB

Dans... la recomposition Le fait d'inclure la France en soi n'est pas gênant mais la situer d'emblée dans le camp des puissances dominantes est plus délicat saut à adopter un concept assez large de grande puissance et ne pas prêter cas à l'expression puissance dominante.

Un libellé « face à la recomposition » aurait permis de saisir les influences françaises comme puissance normative dans des domaines aussi variés que les droits de l'homme (cf. d'ailleurs l'ultra sensibilité de l'ONU et de Michelle Bachelet à la répression des manifestations des gilets jaunes en France) ou la gastronomie ! (la journée des ambassadeurs en est l'apothéose) de sa contribution fut elle modeste à un nouvel ordre mondial. On fait toujours référence à la formule de Chirac notre maison brûle et nous regardons ailleurs en 2002 à Johannesburg... et cela a donné du poids à l'interpellation d'Emmanuel Macron « *make our planet great again* » (2017).

Des documents variés et très explicites

• **Le document 1 sur Recherche et développement** permet de dissiper une illusion : 7^e rang en volume la recherche française en % du PIB révèle ses handicaps :

- Par rapport aux objectifs de Lisbonne car 2,25 % marque un retard face au 3 % envisagés pour faire de l'UE une puissance compétente ;
- Par rapport à des concurrents directs de la Triade Allemagne Japon et EU (en volume comme en %) ;
- Par rapport aux exigences de la 3^e révolution industrielle décrite par J. Rifkin ou la 4^e révolution industrielle décrite par Karl Schwab : armement et secteur public sont encore trop présents.

Un tableau du world economic forum avait le mérite de trouver la martingale en chiffres permettant de déclasser au maximum la France ! 15^e rang ! en 2018 on aurait trouvé un 17^e rang de l'indice de compétitivité mondiale avec un score de 78, elle se distingue grâce à la qualité de sa santé (7^e), la taille de son marché (9^e), les infrastructures (8^e), et la capacité d'innovation (11^e), notamment grâce à ses instituts de recherche (3^e) ou la qualité de ses publications (5^e). « *La France sécurise une place parmi les vingt premières économies mondiales, en ayant récemment lancé un programme de réformes ambitieuses avec la loi travail, effectué une réforme des services publics et rendu le pays attractif aux investisseurs du secteur des technologies* », analyse le rapport. Si elle n'apparaît qu'à la 17^e place, c'est notamment en raison de ses mauvais scores en termes de marché du travail, de compétences (et notamment numériques) de la population et de dynamisme des entreprises en particulier à l'égard du risque entrepreneurial. Sur ce point, le pays se classe 84^e en termes de tolérance à l'échec entrepreneurial.

Alors que sur les indicateurs de richesse la France est souvent 6^e 7^e et de nouveau avec le Brexit espère le 6^e rang mais covid 19 oblige soyons prudent ! Observons que dans les robots industriels le Japon vite déclassé dans la hiérarchie mondiale par ceux qui l'identifient à une crise de stagflation continue depuis 1989 retrouve les couleurs d'un pays qui invente et a mobilisé encore récemment plus de 40 % des robots mondiaux.

• **L'Indice des marques nations** pays créé en 2005, l'indice annuel des « Marques Nations » par Simon Anholt diplomate anglais qui a créé cet indice (Nations brand index) reposant sur Exportations, Gouvernance, Culture, Peuple, Tourisme et Immigration/Investissement pour créer des stratégies d'image pour une 50 de pays Anholt/GfK juge la réputation mondiale de 50 pays. La France émerge à la 6^e place ce qui soit dit en passant relativise un peu son rang de 1^{er} puissance en termes de soft power obtenue en 2019 !

• **Une carte des ZEE** Une carte de l'Empire car les enjeux de ces territoires sont importants. Ils représentent une dimension stratégique de premier plan. Ces zones regorgent de ressources énergétiques (matières premières), de potentiel d'énergie maritime renouvelable (éolien), de ressources biologiques, animales et végétales avec un potentiel de croissance monumental dans le cosmétique, l'industriel... et de découvertes scientifiques de plus 90 % des transports sont maritimes et ces zones sont donc des relais importants de même pour l'information avec l'essor des câbles sous-marins. En gagnant en juin 2020 une surface équivalente à plus d'un quart de la France métropolitaine, le domaine maritime français va s'accroître au large de La Réunion, de

58 121 km², et au large des îles de Saint-Paul et Amsterdam, dans les Terres australes et antarctiques françaises (TAAF), de 93 202 km². Soit, au total 151 323 km², la surface des régions Occitanie et Nouvelle-Aquitaine réunies. Une augmentation similaire de plus d'un demi-million de kilomètres carrés avait déjà eu lieu en 2015 ! pour des forages marins. La France consolide son rang de 2^e ZEE mondiale derrière les EU.

• **Une carte de l'empire français en 1914 et la carte des OPEX**

Nostalgie impériale : à l'heure où l'actualité remet au premier plan les problèmes de colonisation et de décolonisation, où le procès de la France s'instruit au Rwanda, la carte de l'Empire montrait qu'avec le 2^e empire mondial derrière la GB avec 33M km² la France avait installé une puissance qui lui a donné pendant longtemps un rayonnement linguistique économique culturel quand ce ne sont pas des voix à l'ONU ou dans les instances internationales mais désormais au rythme des remises en cause de la Françafrique, des difficultés à contenir d'autres puissances dans son pré carré (comme la Chine devenue premier investisseur sur le continent africain) ; la France a du mal à remobiliser cette puissance. Les réseaux sont brouillés (Foccart) les discours sont maladroits ou mal interprétés (N. Sarkozy Dakar, 2007, « *L'homme africain* », qui ne serait pas « assez entré dans l'histoire ». Dans son imaginaire, « *il n'y a pas de place ni pour l'aventure humaine, ni pour l'idée de progrès* ». « *Jamais il ne s'élance vers l'avenir* ») les interventions sont contestées (interventions au Mali désavouée par des historiens africains), les interventions critiquées en Côte d'Ivoire, l'ombre de dépendance depuis l'indépendance plane malgré la recherche de partenariats d'un type nouveau.

• **La carte des OPEX** des quelques 106 opérations depuis 1995, où les armées françaises ont été engagées à l'extérieur des frontières nationales. Elles sont diligentées sous l'égide de l'ONU : Liban (opération Daman menée dans le cadre de la Finul), Côte d'Ivoire (Onuci), Sahara occidental (Minurso), Liberia (Minufil), République démocratique du Congo (Monusco) ; de l'**Union européenne** : mandat de la Mission de sécurité européenne pour l'assistance à réforme de la sécurité en République démocratique du Congo (EUSEC) achevé en juin 2016 ; opération Atalanta (2008) de lutte contre la piraterie maritime au large de la Corne de l'Afrique ; de **forces multinationales**, comme la Force multinationale d'observation (FMO) dans le Sinaï ; Leur analyse montre rapidement leur polarisation excessive sur les terres africaines, leur bilan est souvent mitigé (retrait du Liban) sahel toujours zone grise, leurs espoirs déçus (G5 autonome dans la lutte contre le mujao ou l'Aqmi ou Boko haram et leur représentativité contesté (Où est l'UE dans l'opération libyenne ou au Mali ?). Une façon donc de montrer que la France peut se projeter mais pour autant ne pas parvenir à créer les conditions imposer de solutions durables.

• **La photographie** prise lors du voyage officiel de E. Macron en Chine en Janvier 2018 prend tout son relief si on sait que l'on aurait pu prendre la même en Novembre 2019. Les allers-retours sont fréquents : après avoir célébré le 55^e anniversaire des relations franco-chinoise les voyages se sont succédés avec janvier 2018 mais novembre 2019 sans compter un voyage de Xi Jinping en France en mars 2019. C'est donc bien que la France a un rôle particulier à jouer :

- dans le cadre d'une relation ancienne, la France a été un des premiers pays à reconnaître la Chine de Mao Tse Toung le 27 Janvier 1964 ;
- dans une volonté continue de rapprocher les cultures nationales (de Zao Wou-ki une des grandes figures de la nouvelle Ecole de Paris, à Yan Pei-Ming artiste plasticien contemporain qui a exposé en hommage aux œuvres de Gustave Courbet, ou à l'inauguration d'un centre Pompidou west bind museum à Shanghai dès 2018) ;
- dans le contexte d'un agenda commun pour la biodiversité, la défense de l'accord de Paris l'urgence climatique ;
- mais surtout dans la conjoncture du cavalier seul américain contre le multilatéralisme surtout depuis le retrait américain ;
- dans le nécessaire combat pour la défense des intérêts économiques et commerciaux français et européens, car c'est avec l'ensemble des membres de l'Union européenne que la France peut le mieux porter les projets communs au nom de l'Union européenne (lors de la visite du président chinois A. Merkel était à Paris aux côtés de E. Macron).

Ce n'est donc pas une diplomatie du mégaphone mais plutôt une intermédiation, une diplomatie faite de *real politik* et d'intérêts réciproques bien compris (liens entre Engie et Beijing Enterprises Clean Energy dans les équipements gaziers) ce qui n'exclue pas une vigilance comme sur les routes de la soie Macron a été un des premiers à critiquer la vision « gagnant gagnant » et à rappeler « *ces routes sont en partage et elles ne peuvent être univoques. Elles ne peuvent être les routes d'une nouvelle hégémonie qui voudrait mettre en état de vassalité des pays qu'elles traversent* ».

Fort de ces remarques on pouvait donc proposer le plan suivant :

Problématique

7^e puissance mondiale économiquement, dépassée par l'Inde, grande puissance moyenne pour VGE, « *small open economy* » pour certains la France est-elle désormais une puissance déclassée, dont le volontarisme parfois trahirait la puissance du discours et l'impuissance des actes... ? Que restait-il du « *génie français* » des capacités de cette vieille nation de contredire sur le terrain de la puissance les déclinologues (cf. M. Guénaire, Nicolas Tenzer, *Quand la France disparaît du monde*, Grasset, 2008) pour œuvrer à la recomposition des puissances dominantes garder sa place ou du moins préserver ses intérêts ?

I. La recomposition des puissances dominantes ne peut qu'interpeller la France qui la vit à ses dépens

La nouvelle donne multilatérale

- **La remise en cause du multilatéralisme...** dont la France a été un pivot au travers du conseil de sécurité, de l'accord sur le nucléaire et la non dissémination, l'acceptation contrainte il est vrai mais des règles du Gatt et de l'OMC ce qui ne l'empêche pas de faire entendre sa voix, et la participation active aux opérations de paix de l'ONU tant au Liban qu'en Afrique.
- **La remise en cause de l'ordre nucléaire mondial** dont la France est actrice avec sa bombe A puis H, ses essais parfois contestés (Mururoa), son rôle de parapluie pour l'Europe face aux SS20 russes, avec les

gesticulations de la Corée du Nord et la rupture de l'accord de 2015 avec l'Iran auquel la France avait finalement fini par se rallier malgré des réserves.

- **Un monde apolaire** et la France a cru toujours avoir vocation à l'universalisme de ses valeurs et à un certain leadership en matière de droits de l'homme, de développement durable (Johannesburg 2002) de diplomatie (c'est la France au XVIII^e qui en a été une des architectes (Cf. Kissinger)).

L'émergence de nouveaux rapports de force

- **L'émergence de puissances** qui ont quelques prétentions parfois légitimes à conduire les destinées de l'ordre mondial ; c'est l'ambition de la Chine qui par les routes de la soie la BAII propose des infrastructures et un système de gouvernance différents au risque d'endettement et d'inféodation des pays associés susceptibles de créer dépendances et endettements. Très tôt E. Macron en mesure les risques.
- **Les risques de dislocations de puissances dominantes** : dislocation de l'Europe sous la pression du Brexit, de démocraties illibérales, des populismes et de souverainismes quand ce n'est pas d'un « grandisme » qui fait oublier des règles et des valeurs communautaire (Hongrie). La France ne manque pas une occasion pour se rappeler que la construction européenne est son levier d'Archimède, que l'Europe à la Française était son objectif initial et que malgré les spasmes souverainistes elle reste avec l'Allemagne un des relais indispensables du projet européen, (Macron a été élu sur un programme européen clair) remobilisé pendant la crise sanitaire. Mais beaucoup d'imprécisions, de retards de controverses, d'occasions ratées (Maastricht) de bras de fer (Hollande Merkel sur la mutualisation des dettes) font que la France a du mal à incarner un renouveau.
- **Les reclassements nés de nouveaux défis** : innovation, révolution numérique, Intelligence artificielle data systems la capacité à mobiliser des ressources nationales en temps de crise (la France et ses dépendances pendant la pandémie du coronavirus) au-delà des attributs classiques de la puissance militaire notamment des hiérarchies reposant sur des critères mutants et multiples peu adaptés à la France : le statut très particulier d'une puissance dominante.
- **Face à l'extérieur**
 - Celle qui impulse l'économie mondiale, dont les changements de modèle de croissance animent des cycles : on peut s'interroger sur le modèle colbertiste gaulois qui est de moins en moins mondial-compatible ;
 - Celle qui suscite et dirige des alliances, est capable d'exercer un soft un smart ou à défaut un sharp power pour contrôler et déstabiliser tout adversaire potentiel, la performance en 2019 de la France puissance leader mondial en termes de soft power ne doit pas faire oublier d'autres critères comme le nation brand ou le déclin économique relatif dans la hiérarchie mondiale ;
 - Celle qui a à la fois la capacité et la volonté d'exercer sa domination par des armes multiples qui s'appellent innovation, productivité, le taux d'épargne, consensus social et degré d'éducation. Sur chaque élément des doutes de classement de Shanghai ou Pisa (Il place la France en 22^e position en lecture, le domaine qui était étudié de manière approfondie pour cette édition 2018), ou l'innovation (7^e rang mis objectifs de Lisbonne 3 % du PIB pas atteints) ;

- Celle qui est capable d'utiliser la force classique et la France a une dissuasion nucléaire, est capable de se projeter, peut faire manœuvrer un porte avion à propulsion nucléaire seule comme les EU, peut mobiliser des sous-marins lanceurs d'engins (l'actualité de l'incendie du perle à Toulon l'a rappelé).
- **Face à elle même**
 - Celle qui anticipe dans ses choix économiques et sociaux des mutations les difficultés de réformer dénoncées à la fois par le FMI et surtout les dirigeants allemands qui ont pourtant besoin d'une France forte limite de toute évidence ce pouvoir.
 - Celle qui est capable de vivre un déclin comme un impérieux besoin de se réinventer : au-delà des discours, des incantations souvent la France a des effets d'annonce sans lendemains (l'archipel français demeure J. Fourquet), la décentralisation a encore à être consolidée, la France se réforme dans les tensions des gilets jaunes au front des retraites ou de la défense des hôpitaux.
- **Un état d'esprit**
 - Celle qui feint de ne pas douter surtout à l'aune de l'ouvrage de Fukuyama sur les sociétés de confiance. P. Bruckner : « *le mal français se traduit par une combinaison unique d'arrogance et de haine de soi. Nous cumulonons une vanité sans pareille avec un manque de confiance en nous qui est le symptôme des nations en déclin...* » les économistes Yann Algan et Pierre Cahuc dans leur essai *La société de défiance* 2008 font de la méfiance le principal handicap français (34 % des Français contre 10 % des Allemands).

II. Circonscrire le rôle de la France dans cette nouvelle donne impose de mobiliser des héritages plus qu'une pratique récente

Les héritages d'un statut grande puissance...

- Il faut convoquer le temps long ; Maxime Lefebvre « *La France est une vieille nation, la plus ancienne d'Europe avec l'Angleterre, et sa politique étrangère l'inscrit donc dans une histoire longue., le royaume de France fonde ce qui deviendra, avec la Révolution, une nation, avec l'adhésion à un territoire et à des valeurs à vocation universelles, dont le seul autre grand exemple est les États-Unis* ». (*La politique étrangère française*, Puf)
- Il faut se souvenir du passé : passé colonial (2^e RM 1914), qui garantit désormais des liens, des interdépendances, des ZEE, réseau diplomatique hérité du XVII^e siècle (189 ambassades), et un maillage culturel de grande puissance : 811 Alliances françaises depuis 1883 (Barcelone) dans 137 pays, 488 établissements français à l'étranger (320 000 élèves dont une classe à Oulan-Bator !), 143 centres culturels et instituts français dans le monde depuis Florence, en 1907, relayés par RFI et TV5 Monde.
- Il faut rappeler les valeurs à vocation universelle. Comme disait le général de Gaulle, « *il y a un pacte vingt fois séculaire entre la grandeur de la France et la liberté du monde.* », l'exception culturelle française et le combat mené par la France pour que les productions culturelles ne soient pas traitées comme des marchandises, un certain modèle français qui a été opérationnel en période de rattrapage (modèle social colbertiste gaulois : JB de Foucauld = modèle prioritaire dans 1950's = État acteur...)

et a valu à la France au travers du couple franco-allemand d'être actrice de la construction européenne.

Pour H. Védrine. « *Hérité du passé, il y a aussi le rayonnement linguistique, qui est aujourd'hui négligé à tort par les élites françaises alors que cela demeure un atout de premier plan. Et puis, il y a l'image construite au fil du temps. Par exemple, aux yeux des Japonais ou des Coréens, la France reste assimilée à qualité de vie, art de vivre, luxe... La gastronomie, les vins sont des atouts qui croissent avec l'enrichissement du monde émergent. La vitalité culturelle, elle, dépend des domaines, surtout qu'elle est confrontée au rouleau compresseur du mainstream culturel américano-globalisé, industrialisé, qui submerge toutes les autres cultures* ».

Mais une puissance brute écornée, et une puissance d'influence érodée

- Une Diplomatie française émoussée (fermeture d'ambassades, consulats), solutions inefficaces (échec programme de paix Libyen prévu par E. Macron, mise en contact D. Trump/Iran qui a débouché après le G7 de Biarritz en 2017 sur une impasse). Des difficultés face aux EU symbolisées par des bras de fer sur les sanctions commerciales, sur la fiscalisation des profits des Gafam, une difficulté à regarder son passé (lenteur de la réconciliation avec Algérie traité d'amitié de 2003 pas validé en 2019 N. Sarkozy qui accorde une colonisation injuste), un affaiblissement comme rôle de « magnet » d'étudiants étrangers retards dans l'enseignement supérieur et ; 1,1 % du Pib de la France consacré à l'enseignement supérieur contre 2,6 % aux EU France ligotée avec ses liens avec le Qatar autant que son manque d'autonomie vis-à-vis de Moscou (sanctions : trop de suivisme vis-à-vis des EU. Le Retard de la promotion de la langue française « cette langue en partage » pour Maurice Druon) Francophonie (3 % de la population mondiale 274M de locuteurs portée sur tous les continents ou francophobie ? 5^e *idiome d'usage cybernétique seulement derrière anglais chinois espagnol*) à l'international par rapport à l'espagnol.
- Surtout convergence de tous les rapports sur les carences de la R&D fondamentale hors militaire (Camdessus, Beffa, Arthuis, sur le problème de l'innovation et la nécessité du sursaut malgré la création d'une Agence pour l'innovation industrielle en 2005. Les 300 000 Français qui étaient installés en GB sont le miroir de ces carences... qui pèsent sur l'emploi et les déficits. Un contexte où militairement la France subit la pression des budgets militaires (en 1 an, Donald Trump a augmenté le budget militaire américain de l'équivalent du budget français). Les Français ont beaucoup de mal à transformer la chaîne de production locale en un assemblage où une pièce fabriquée à Romorantin s'ajuste avec une pièce produite à Shanghai et une troisième venant de Budapest. C'est l'une des explications majeures des pertes de marchés de l'industrie tricolore. Au niveau numérique, la France souffre du syndrome de pays de taille intermédiaire qui se rêve en grande puissance. Seulement dans ce domaine ?
- Rapport Carresche : au sein de l'Europe, représentation en déclin 10 % des députés contre 20 % en 1979 et abstentionnisme et si on cumule une certaine fragilité économique, passage d'un excédent des paiements de 3,2 % du PIB à déficit de plus de 60 Mds d'euros depuis 2017 qui rend peu audible les efforts budgétaires français pour rester dans la norme, la pression des groupes populistes qui au parlement européen (RN 23 députés

européens) captation des postes décisionnels par l'Allemagne (17 % des postes d'encadrement au Parlement contre 8,5 % pour la France).

De grandes peurs outrancières ? « la hantise du déclin »... parallèle à « une fierté nationale », B. Giblin le paradoxe français

- Peur de l'autre (immigration et débats sur le voile, l'apartheid de certains quartiers), peur du progrès cf. de Gaulle la tendance des Français quelle que soit leur profession est de réclamer le progrès en espérant que tout restera comme avant cité dans Timothy B. Smith *La France injuste* 1975, 2006 recherche de bouc-émissaires (Bruxelles accusée dès que problèmes en France car vue comme démocrates déconnectés de la réalité du pays, démocratie), France se sent menacée (français recule face au globish), classement de Shanghai (22 sur 500 premières), difficulté des réformes, « masochisme français » (pays arrogant et qui ressasse son déclasserment, pas une grande nation industrielle (pas un modèle et emprunte à d'autres voies nationales, pas une grande puissance exportatrice PME franco françaises). Peur de la bureaucratie bruxelloise alors que la France ne respecte pas les réglementations européennes.

La peur des défis chinois surtout quand la Chine rachète le club med en 2015, aéroport de Toulouse lanvin en 2018, le Louvre hôtel par holding Jin Jiang ou Gevrey chambertin ou Dong feng dans PSA.

Peur de la mondialisation... cf. sondage inquiétant aux yeux des Français, l'Asie et l'Amérique du Nord sont, sans surprise, les grands gagnants de la mondialisation, et plus de 60 % dénoncent les effets négatifs de la mondialisation (caisse de résonance des gilets jaunes) *On peut avoir deux analyses : soit les gilets jaunes sont une catastrophe pour l'image et l'influence de la France à l'extérieur car ils vont créer un chaos qui empêchera le président d'accomplir les réformes qu'il croyait nécessaires pour asseoir sa crédibilité et son leadership en Europe d'abord et dans le monde ensuite. On peut avoir une seconde analyse, qui consiste à dire que peut être ce mouvement est une chance pour Emmanuel Macron pour réformer la France.*

Pour mémoire les FMN étrangères emploient 1,8 M de Français sur le territoire national et les IDE créent ou préservent autour de 35 000 emplois par an.

- Peur du déclin cette idée congelée que l'on ressort périodiquement J.-P. Raffarin. Dès le XV^e siècle déjà la France d'autrefois se vivait sous la plume de Georges Chastelain comme princesse couronnée de gloire devenue princesse déclinée d'état languissante.

III. Pourtant la France a un rôle particulier sinon unique dans la recomposition

Pour être actrice dans la recomposition des puissances dominantes la France doit clairement s'évaluer

- Pour s'évaluer clairement la France ne doit pas oublier qu'elle a un rang. Pour H. Védrine la France est un grand pays qui est au niveau moyen mondial mais unique.
 - « Il faut trouver une part d'équilibre entre la grandiloquence et le dynamisme. On est trop enfermé dans une logique de rayonnement qui

nous conduit à une nostalgie » Derrière cette formule un peu éthérée... des réalités.

- La France a des atouts : ses technologies, ses champions nationaux, son marché intérieur, ses paysages (tourisme), sa langue « un humanisme intégral tissé au travers des valeurs émanant de la langue française, ce merveilleux outil trouvé dans les décombres du régime colonial » (Léopold Sedar Senghor, 1962) mais aussi sa diversité « agrégat inconstitué de peuples désunis » pour le jeune Mirabeau, la France d'aujourd'hui fait (pourrait faire ?) de sa diversité une force, et pour « faire tenir ensemble toutes ces diversités, elle a inventé des moyens originaux et délicieux : l'humour, la conversation et la gastronomie » (J.-C. Rufin). Sa générosité surprenante « pour des petits paysans assis sur leur magot » (Keynes). La France a donné l'exemple avec le lancement par Jacques Chirac d'une « taxe de solidarité » (Unitaid) pour lutter contre le sida, le paludisme, la tuberculose. 160 millions d'euros par an dont elle acquitte (hélas ?) 93 % à elle seule. Sa capacité à épouser de grandes causes COP21.
- Mais la France doit identifier les pathologies multiples de la perte de son influence. Pour le rapport Caresche « les élargissements successifs à l'Est qui ont contribué à éloigner la France du cœur de l'Europe » et les difficultés du pays à « moderniser son économie » et à « respecter ses engagements budgétaires qui ont diminué sa crédibilité ». C'est aussi la « faiblesse de la France au Parlement européen », qui s'est « accentuée avec le vote en faveur d'élus FN », réduisant mécaniquement le nombre d'élus dans les deux grandes forces politiques, le Parti populaire européen (PPE) et le Parti socialiste européen (PSE), ainsi qu'une « insuffisante lisibilité de la vision que porte la France pour l'Europe de demain ». Plus généralement le diagnostic ancien de J. Pisani Ferry est d'actualité ; « *on ne peut pas miser sur l'innovation mais laisser l'université en déshérence, maintenir une fiscalité qui favorise le capital fixe, protéger les champions nationaux et privilégier la protection des emplois existants plutôt que la création d'entreprises...* »

La France doit définir de nouveaux rapports avec certaines puissances dominantes

- Elle peut porter l'étendard du multilatéralisme et de la réforme de certaines institutions (*l'Otan atteint de mort cérébrale* pour E. Macron) : France Russie si on prend en compte le retour de l'Histoire en Russie, son rôle accrue régionalement, la politique d'occupation du vide : Syrie Libye après Donbass ainsi est réactualisée la question de partenariat avec la Russie surtout après l'annexion de la Crimée et la pression russe sur le fédéralisme ukrainien. N'oublions pas que la France a été initiatrice avec l'Allemagne des accords de Minsk 1 et Minsk 2 et que le référendum gagné par Poutine le replace au cœur de l'échiquier jusqu'en 20. La France doit définir des rapports nouveaux avec la Chine surtout en profitant des contentieux Chine/ EU aggravé par la crise sanitaire et la mise en sommeil d'accords commerciaux un grand équilibre entre la pression pour normaliser la situation de Hong Kong (répression des fondements de toute autonomie) mais aussi une realpolitik qui tienne compte de l'effacement des États-Unis : cf. voyage de Macron en 2018 et 2019 en Chine.
- Elle peut définir de nouveaux rapports en Europe pour jouer un rôle de puissance dominante : E. Macron dans son discours de la Sorbonne (dès septembre 2017) et en mars 2019 veut bâtir la « *Renaissance européenne*

avec le triptyque la liberté, la protection et le progrès ». La révision de la directive des travailleurs détachés trouve un épilogue dans la gestion de l'emploi pendant la crise sanitaire avec des pressions pour un emploi national. La crise du coronavirus lui a offert une fenêtre de tir : avec A. Merkel il propose un plan de 500 mds d'euros de relance (750 mds d'euros au 27 mai pour secteurs et régions en difficultés). Il parle de « saut quantique » défiant les lois de la gravité européenne c'est-à-dire un endettement fondé sur la solidarité. Les Allemands n'ont pas dit leur dernier mot dans un leadership éclairé mais Wolfgang Schauble affirme avoir besoin d'une France forte à l'heure où A. Merkel le 1^{er} Juillet s'apprête à prendre la tête de l'Union. Mais la France est difficilement capable d'imposer une vision sur les migrations, les frontières, la Syrie, les Kurdes.

« Elle peut renforcer le projet de défense européenne. Jamais, depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale, l'Europe n'a été aussi nécessaire. La construction d'une Europe de la défense, en lien avec l'Alliance atlantique dont nous fêtons les 70 ans, est pour la France une priorité. [...] Agir ensemble et renforcer notre capacité à agir collectivement : tel est notamment le défi que l'Initiative européenne d'intervention, avec d'autres projets européens essentiels, veut relever. » E. Macron.

- La France est une agitatrice d'idées, celle qui peut éviter que l'UE ne devienne une « grande Suisse » c'est-à-dire un ensemble économique sans nerfs manifestant une attitude compassionnelle vis-à-vis du reste du monde et incapable de se défendre. Cf. initiatives de Macron depuis le discours de la Sorbonne et sa volonté de relancer une Europe de la défense. « Je crois que la France porte en elle un projet inédit : un projet d'éducation de chacun, une culture forte qui nous unit, un projet de construction d'une écologie industrielle, d'une société aux solidarités nouvelles et au service des personnes. » Benoît Coeuré (BCE) « Sans l'Union européenne, et sans l'euro la France serait une puissance moyenne, et vulnérable, car surendettée avec une productivité déclinante. L'euro et l'Europe offrent à la France une protection qui lui permet de rester maîtresse de son destin en gérant elle-même son processus de réforme ». Savoir gérer le Brexit sous la houlette d'un français d'ailleurs (M. Barnier). On aurait envie de convoquer l'indice de Penrose-Banzhaf qui indique la probabilité du nombre de victoire de coalitions impliquant la France (de la conception d'un projet à son approbation).
- Réviser ses choix africains depuis Hollande Congo et programme d'effacement des dette et comme dans la région de Kayes réinscrire des programmes de codéveloppement, favoriser la gestion par l'Afrique elle-même de ses conflits (G5 Sahel) faire de l'Afrique notre avenir (Bercy forum 2015, F. Hollande).

Mais avant de se positionner dans la recomposition la France doit se recomposer (se réformer elle-même). Il n'y a pas que Wolfgang Schäuble qui appelle de ses vœux une France forte.

Pour ce faire la France peut :

- Réviser certains fondamentaux quand la dépense publique représente déjà 56 % du PIB la retraite dans le PIB 14 % contre 9 % en Allemagne la santé l'éducation le logement où avec 1 % de plus de PIB que l'Allemagne dans chaque secteur les résultats ne sont pas plus probants. La dette (120 % du Pib en 2020 moitié plus élevée qu'outre Rhin) entrave beaucoup d'initiative.

- Réindustrialiser la France avec certes des relocalisations (santé avec les principes actifs des médicaments ou l'agroalimentaire pour revenir à l'autonomie alimentaire) mais aussi jouer de l'attractivité des territoires pour revitaliser des bassins d'emplois en Vendée Vitrac mecanic vallée de decazeville à Figeac ou plasturgie à Oyonnax. La régionalisation des chaînes de valeur doit devenir une politique européenne dynamisée par la France.
- Relocaliser l'industrie pour Louis Gallois président de la Fabrique de l'industrie à la fois pour être moins dépendant et pour proposer des technologies nouvelles innovantes : EPR après les déboires de la Finlande et de Flamanville. Consolider l'industrie de l'armement où la France obtient parfois des succès tardifs rafale réels sous-marin. Les exportations françaises explosent dans le secteur de l'armement. Entre 2010 et 2019, dans le top cinq des principaux pays exportateurs, la France – redevenue le numéro trois mondial – a connu la plus forte progression de livraisons selon des données publiées (mars 2020). Relancer l'industrie des batteries ou du solaire ou de l'efficacité énergétique mais n'est-il pas trop tard ?
- Participer à des combats pour le futur sur la lancée de la COP21 (industries vertes économie décarbonée) mais en veillant à respecter les engagements ce qui n'est pas le cas pour les émissions de CO₂.
- Agir sur les fronts qui justifient pour certains une « démondialisation » salvatrice : lutte contre les paradis fiscaux, lutte contre les inégalités, solidarités sanitaires.

Mais les marges de manœuvre de l'État se réduisent avec la montée de partis qui instrumentalisent la peur de la mondialisation et appellent au nationalisme, la montée des fracturations de la France devenue archipel (J. Fourquet) le manque de moyens financiers (endettement) qui limitent des discours à... des discours sans lendemains, des marges budgétaires assouplies depuis peu avec une crise sanitaire imbriquée dans une crise économique dont on en peut saisir encore l'ampleur et un cadre européen où face aux pays frugaux la France est un peu isolée ou noyée dans le camp des pays européens imprudents du Sud...

De toute façon on se posera toujours la question posée par M. Foucher dans son *Atlas de l'influence au XX^e* : comment un pays de 65 M d'habitants peut-il rester influent ?

Conclusion

La France est-elle condamnée à ce bilan de M. Guénaire in « le génie français » : « *elle fut une puissance et sans doute ne le redeviendra-t-elle plus. La France fut un modèle et maintenant elle doit le redevenir...* » Entre excès de prétention et sous-estimation de soi la France continue de s'interroger sur sa place dans le nouveau système international qui se dessine. Elle doit le faire sans uniquement se bercer d'illusions et notamment croire à des exceptions pérennes. Theodore Zeldin, fin observateur des passions françaises, est un bon prescripteur « *La France n'était pas un pays d'exception mais croit l'être parce qu'elle ne se lasse pas de se demander en quoi elle est un pays d'exception.* » « *La France n'a été créée que par la Providence pour des succès achevés et des malheurs exemplaires* » tel était le sens de l'Histoire de la France pour le trublion dans l'ordre international qu'était le général de Gaulle. La crise ouverte par la pandémie de la Covid 19 tranchera partiellement...

HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

SUJET

DURÉE : 4 HEURES.

GEM

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Les documents d'accompagnement ci-joints sont essentiellement là pour aider le candidat dans sa réflexion sur le sujet posé.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

La Chine est-elle un colosse aux pieds d'argile ?

Quelques indications pour bien le traiter

Vos principales sources d'inspiration seront :

1. Les connaissances acquises lors de la préparation à l'épreuve ;
2. Les pistes de réflexion indiquées dans le paragraphe qui suit ;
3. L'ensemble des documents proposés pour aider à répondre à la question posée : sans forcément les commenter tous, ni un par un ni dans l'ordre, il convient de s'en servir pour étayer son propos.

Pistes de réflexion :

La Chine exerce un rôle régional et mondial en dépit d'une longue tradition de repli sur soi. Elle a aussi des liens anciens avec nombre d'autres pays. Le rapport des autorités chinoises à tout ce qui est d'origine occidentale reste ambigu, aujourd'hui comme hier.

Documents à l'appui :

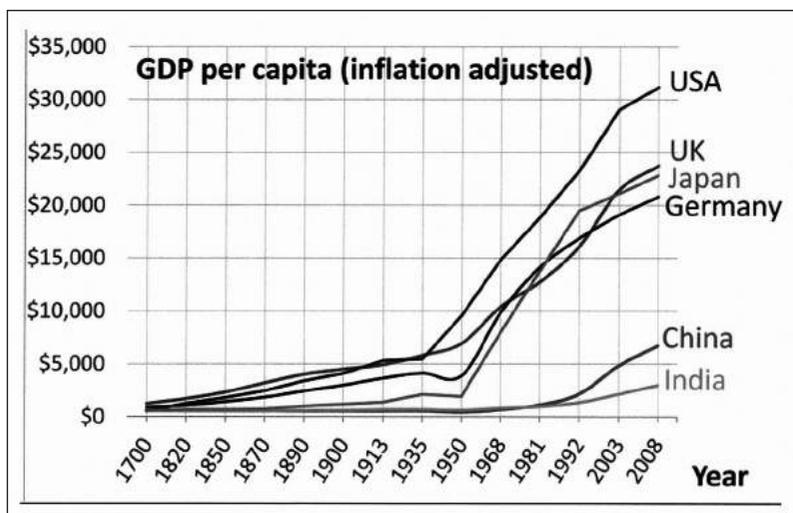
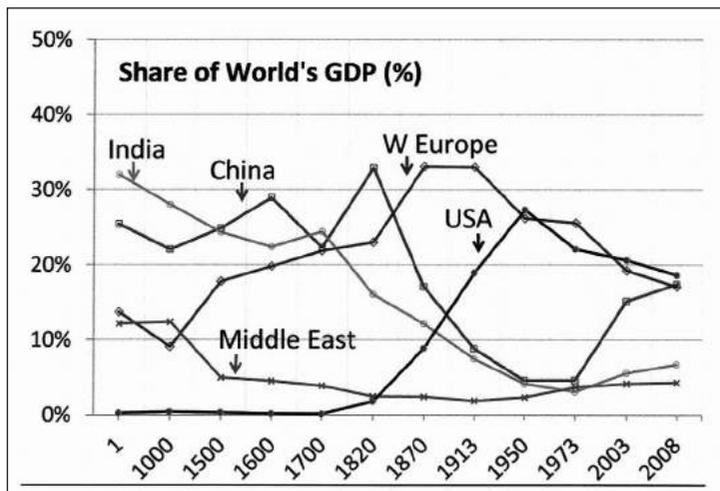
Indicateurs chiffrés, chronologie, texte, illustrations.

SCIENTIFIQUE
HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE

DOCUMENTS

Document 1. Indicateurs chiffrés

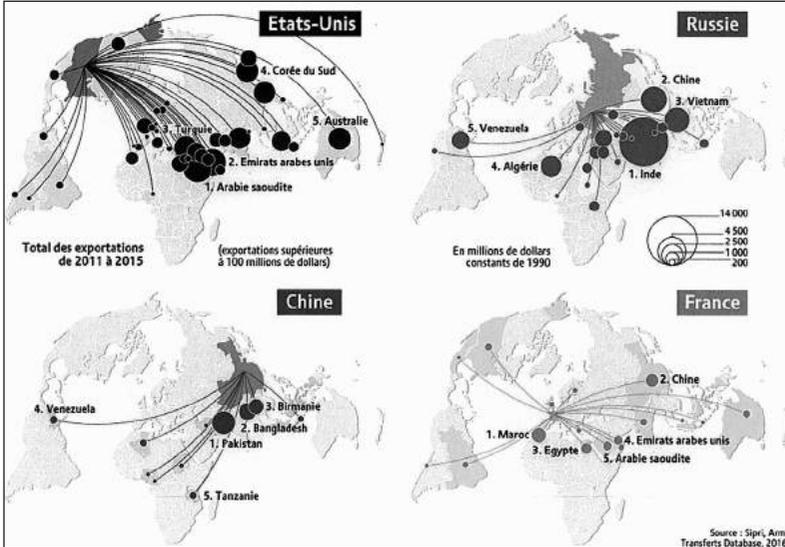
Graphiques extraits de : Maddison A (2007), *Contours of the World Economy/2030AD*, Oxford University Press, 2014. L'échelle de temps va de l'an 1 à l'an 2008 de notre ère, il n'y a pas de statistiques comparables plus récentes et disponibles.



Cartes

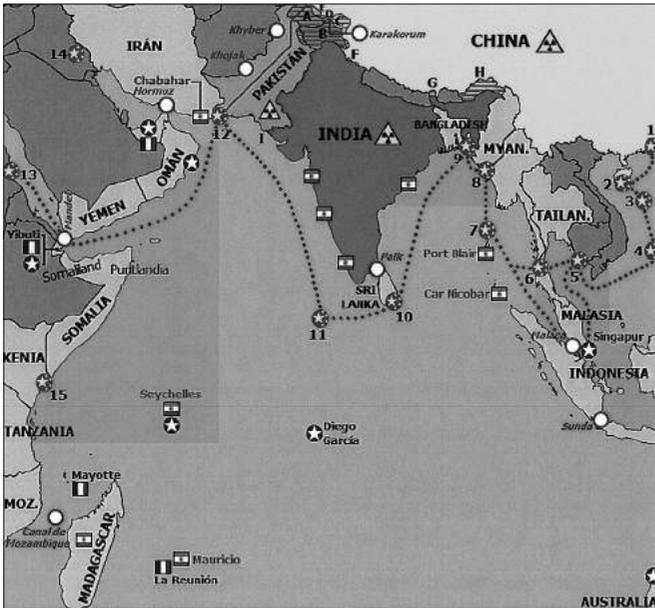
Document 2. Exportations d'armes par les principaux pays exportateurs en 2016

Source : Sipri, Arms Transfers Database, 2016



Document 3. Les bases militaires chinoises, indiennes, américaines et françaises dans l'Océan indien (En 2017, la Chine a inauguré une base militaire à Djibouti).

Les ronds blancs cernés de rouge désignent des détroits et des cols, la ligne en pointillé représente de manière imagée ce « collier » fait de 15 « perles »).



Chronologie

Document 4. Évolution des dépenses militaires chinoises entre 1988 et 2018, comparées au montant du budget des armées d'autres grandes puissances



Extraits de deux articles portant sur la question

Documents 5. Extrait de Pierre Grosser, « De l'histoire de la puissance chinoise à la puissance chinoise par l'histoire », *Revue internationale et stratégique*, 2019/3 n° 115, pages 27 à 37.

L'ordre régional en Asie orientale fut longtemps hiérarchique et fondé sur une culture commune. Sinocentré, il reposait sur le principe de « la Chine supérieure, les autres inférieurs », cette supériorité se situant principalement dans le domaine culturel et moral. Normes et valeurs internes servaient à réguler les relations avec le monde extérieur : il n'y avait donc pas de réelle séparation entre politique intérieure et politique extérieure ; la moralité, et non le droit, réglait les rapports régionaux. Depuis quelques années, la République populaire de Chine (RPC) est tentée par la réhabilitation de ce passé, d'autant qu'il aurait permis – selon des théoriciens chinois, mais aussi étatsuniens – de limiter les affrontements interétatiques, qui auraient de fait été moins nombreux qu'en Europe durant des siècles – menant parfois à l'utilisation du terme *pax sinica*. À l'inverse des prétentions occidentales à imposer un modèle politique et à intervenir dans les affaires intérieures des autres pays, l'empire du Milieu aurait laissé une grande autonomie à chacun de ses membres, tant que ceux-ci reconnaissaient la place symbolique de l'empereur. L'arrivée du système westphalien en Asie, derrière le masque de l'égalité entre États, aurait ensuite rabaisé la Chine, et amené guerres et colonialisme. Les discours sur l'harmonie et sur la bienveillance, sur l'acceptation de l'ordre chinois, sur l'exceptionnalisme de la Chine... semblent aujourd'hui être une réponse aux théories états-uniennes sur l'hégémonie bienveillante des États-Unis. Ils se placent à l'encontre de la géopolitique belliciste des États, caractéristique des relations internationales « à l'occidentale ».

Il va donc falloir s'habituer à ce que la puissance chinoise se manifeste par une relecture, voire une modification, des cadres d'analyse internationaux, à ce que les relations internationales « à la chinoise » consistent en des modèles différents et que ceux-ci soient revisités à l'aide d'études de cas tirés de l'histoire chinoise.

Documents 6. Extrait de l'article d'Antoine Bondaz, « Faire entendre la voix de la Chine : les recommandations des experts chinois pour atténuer la perception d'une menace chinoise ». Revue *internationale et stratégique*, 2019/3 n° 115, p. 97 à 106

Depuis quelques années, le discours et les mesures à l'encontre de la Chine, notamment aux États-Unis, se durcissent. Publiée en décembre 2017, la nouvelle stratégie de sécurité états-unienne... précise que la Chine constitue un « concurrent stratégique » au même titre que la Russie. En juin 2018, un rapport de la Maison-Blanche affirme que « l'agression économique de la Chine menace non seulement l'économie américaine, mais aussi l'économie mondiale dans son ensemble ». Les derniers rapports officiels sur les capacités militaires du pays estiment, quant à eux, que l'empire du Milieu cherche à « imposer sa volonté dans la région », un élément récurrent depuis des années, mais surtout que la « Chine mène des opérations d'influence contre les médias, les milieux culturels, commerciaux, universitaires et politiques des États-Unis, d'autres pays et des institutions internationales afin d'obtenir des résultats favorables à ses objectifs en matière de sécurité et de stratégie militaire »...

En réaction, les analystes chinois procèdent à de nombreuses recommandations en vue d'atténuer l'impact du concept de menace chinoise à l'étranger... Une première série de recommandations vise à adapter la réponse chinoise en fonction des pays, puisque leurs perceptions diffèrent. Alors que les États européens considéreraient la Chine avant tout comme une menace économique et normative contestant les normes européennes, il faudrait souligner la coopération économique avec les pays les plus touchés par la crise économique, accepter d'accroître les importations chinoises en provenance de ces pays et soutenir la position européenne sur la non-imposition de droits de douane...

Une seconde série de recommandations vise à contourner les mécanismes de surveillance et à « affaiblir la vigilance des pays occidentaux » en ayant recours à des organismes et des activités considérées comme positifs et peu risqués par les Occidentaux, dans le but de véhiculer les idées chinoises. Il est ainsi conseillé d'utiliser les instituts Confucius, non seulement car ils enseignent la langue mais surtout la culture et les concepts chinois.

Deux illustrations

Documents 7a. L'armée rouge en 1930



Documents 7b. L'armée populaire de libération chinoise aujourd'hui



La Chine est-elle un colosse aux pieds d'argile ?**Un sujet classique d'actualité... si on fait fi des documents fournis pour une interprétation moins classique**

- À l'heure où le retrait américain du multilatéralisme, fait de la Chine un hypothétique prétendant à organiser le monde (sujet Ecricome 2019 *la Chine impose elle un nouvel ordre mondial*) après sa région (sujet Essec 2019 *la Chine et l'Asie orientale*)...
- À l'heure où la pandémie de la Covid 19 jette un doute sur la transparence initiale des informations, la répression pour les canaliser et parvenir à des statistiques qui interpellent les autres puissances.
- À l'heure où Pékin assoie son influence sur Hong Kong en mettant entre parenthèses les conditions de l'accord initial avec Londres et surtout en faisant fi des souffles démocratiques derrière les manifestations des parapluies de la jeunesse, contre l'amendement des lois d'extradition en mars 2019 et aujourd'hui contre le texte sur la sécurité adopté par le parlement chinois.
- À l'heure où des conflits commerciaux se multiplient où la 5G portée par Huawei fait craindre des rapports de force déséquilibrés. L'Agence nationale de sécurité des systèmes informatiques (Anssi) en France a fait savoir qu'elle limiterait à huit ans maximum les licences d'exploitation de la 5G, la cinquième génération de l'Internet mobile, pour les opérateurs français SFR (Altice) et Bouygues Telecom, qui utilisent déjà les équipements de Huawei, géant privé chinois des télécommunications.
- À l'heure où la Chine fixe le cap de 2049 de façon plus nette comme l'année où elle sera non seulement, une grande puissance avec ses caractéristiques propres mais aussi la première des superpuissances ?

Attention ! Un libellé qui n'est pas sans importance... l'expression « colosse aux pieds d'argile » est riche de sous-entendus

- Dans La Bible (l'ancien testament), Nabuchodonosor, le roi de Babylone avait rêvé d'une immense statue à la tête d'or, au torse et aux bras d'argent, aux cuisses de bronze et aux jambes de fer. Ses pieds, eux étaient faits d'argile et de fer. Une pierre se serait alors détachée d'elle-même, frappant la statue aux pieds, ce qui les brisa et entraîna le bris de la statue toute entière. Le prophète Daniel (7^e siècle av. J.-C.) lui, interpréta donc le rêve : les parties de la statue et la matière dans laquelle elles étaient faites représentaient son empire, Rêve prémonitoire, la vision du colosse aux pieds d'argile annonce l'effondrement du grand empire babylonien en 539 av. J.-C., sa capitale Babylone tombe sous les assauts des Mèdes du roi Cyrus II le Grand... balayé par les Perses.

Alors quels pourraient être les pieds d'argile de la Chine ?

- Ses propres bases territoriales avec notamment la région du Xinjiang où la répression contre les ouïgours musulmans est de plus en plus stigmatisée à l'extérieur et les camps assimilés à une rééducation imposée par la force, *idem* pour le Tibet normalisé par les Hans mais soutenu par la communauté internationale (surtout EU et pays européens qui cautionnent le mandat céleste du Dalai Lama et au mieux une autonomie relative de la région).
- Ses frontières car la Chine souffre comme l'ex URSS d'un complexe obsidional c'est-à-dire qu'elle se sent encerclée et menacée. Toute son entreprise de sécurisation de ses frontières n'ont pas empêché deux problèmes de la Guerre froide de subsister (Taïwan et la Corée du Nord) des tensions demeurer avec l'Inde, des contentieux se multiplier en mer de Chine, des ressentiments exister sur la frontière avec la Russie sur l'Amour, des refus de se normaliser (comme après les décisions concernant le rocher de Scarborough avec les Philippines)...
- La Chine a son « Alsace-Lorraine » : Hong Kong et Taïwan. Le résultat électoral de Hong Kong (participation élevée de 71 %, 358 sièges sur 452) après des semaines de manifestations violentes a mis les pro chinois en déroute et réintroduit dans le jeu la pression des EU qui menacent de rompre des accords préférentiels si la démocratie est bafouée. Même si Taiwan a rejeté le parti le plus indépendantiste et promu le parti le plus conciliant le KMT la normalisation des rapports avec la Chine continentale n'est pas encore d'actualité, la répression crée des enchaînements périlleux.
- Sa démographie où l'affaiblissement de la natalité, de la fécondité, du nombre de femmes actives et plus généralement le tassement de la population active (l'Attané) à moyen terme constitue une menace pour le modèle chinois où « l'homme comptait si peu », Braudel.
- Des dérives sous-jacentes à l'essor fulgurant depuis 2000 ; endettement, rôle surévalué du secteur public inflation immobilière.
- Des dénonciations des nouveaux visages de l'impérialisme chinois : la route de la soie critiquée pour laisser trop de place à la sujétion par l'endettement (comme au Sri Lanka pour le port de Hambantota ou en Afrique où le « win win » est de plus en plus une fiction).
- Des dérapages de l'environnement. À ce titre la crise sanitaire sera une excellente base d'observation pour voir si la Chine revient au monde d'avant poursuit sa décélération ou non d'émission de GES qui dès 2012 l'ont placé au premier rang mondial devant les EU comme pays émetteurs.
- Le rôle du PCC qui dans une logique de rattrapage avait toute sa légitimité, dans une logique d'installation de performances exceptionnelles (Chine premier exportateur mondial) a trouvé sa feuille de route mais qui depuis la crise de 2008 l'affaiblissement de certains résultats, est obligé de fuir dans un nationalisme sourcilieux pour (re)trouver sa crédibilité. Question ? Jusqu'à quand face à la normalisation introduite par la mondialisation, et face à la consolidation du couple développement / démocratie... ? Sans résultats économiques, les milliardaires rouges du comité central du PCC auront peu de crédit.

- Le développement différencié entre économie et militaire... qui expose la Chine à un rattrapage type Russie de Brejnev et Gorbatchev qui va se révéler à terme suicidaire ou impossible... L'émergence du complexe militaro-industriel chinois ne siphonne-t-elle pas le développement chinois et en freine-t-il pas l'accès à une puissance à 360 degrés c'est-à-dire à la fois une « puissance économique culturelle militaire spatiale diplomatique et normative » comme la désigne A. Eckman.

Attention ! Les pistes de réflexion ouvertes par les documents privilégiaient le poids du militaire comme indicateur

Des indicateurs économiques sur le temps long étaient fournis (doc. 1) révélant l'évolution de la part comparée du PIB chinois dans le PIB mondial depuis l'an 1000 et même le PIB par habitant depuis 1700.

- S'agissait-il d'une fantaisie ? non mais d'un solide rappel que l'économie comme la puissance sont cycliques en Chine et que la Chine peut se prévaloir d'un statut de grande puissance... au XVIII^e siècle. Citant Paul Bairoch, Philip S Golub rappelle d'ailleurs que « *en 1750, la part relative de la production manufacturière chinoise* était de 32,8 %, alors que celle de l'Europe était de 23,2 % – leurs populations respectives étant estimées à 207 millions et 130 millions de personnes. *Prises ensemble, les parts de l'Inde et de la Chine atteignaient 57,3 % de la production manufacturière globale [...]. Le produit intérieur brut par habitant en Chine s'élevait à 228 dollars (valeur de 1960), contre 150 à 200 dollars selon les pays en Europe* ». Le domaine du textile, était déjà dominé par la Chine dans l'Antiquité à travers notamment la route de la soie. À cela, s'ajoute le commerce des épices, comme le rappelle Philip S. Golub, sur le plan de la production manufacturière globale, « Si l'on ajoute à l'Inde et à la Chine les parts des pays d'Asie du Sud-Est, de Perse et de l'Empire ottoman, la part de l'Asie au sens large (à l'exclusion du Japon) avoisinait les 70 % ». Avec Joseph Needham, *La science chinoise et l'Occident*, Paris, Seuil, 1973, p. 9. On estime ainsi que depuis le début de l'ère chrétienne, la Chine a occupé une position dominante dans le monde pendant la majeure partie du temps. Selon Joseph Needham, « les Chinois [...] furent, entre le I^{er} et le XV^e, généralement bien en avance sur l'Europe, et il fallut attendre la révolution scientifique de la fin de la Renaissance pour que l'Europe prenne soudain la tête ». Pour prendre la mesure de cette position dominante à l'échelle du temps, il suffit de penser que les États-Unis ne le sont que depuis 60 ans à peine puisqu'au début de la Seconde Guerre mondiale, ils étaient seulement la 5^e puissance militaire derrière la Grande-Bretagne, l'Allemagne le Japon et la France. On ne comprend pas la stratégie actuelle d'affirmation de puissance de la Chine si on ne revient pas sur cette position dominante longtemps détenue dans l'histoire, les conditions dans lesquelles elle a été perdue et le désir ardent de renouer avec le passé.

Les documents sur la puissance militaire chinoise étaient plus denses

Doc. 2 : les exportations d'armes de la Chine

- La Chine figure en deuxième position dans la production d'armes derrière les États-Unis et devant la Russie, estime l'Institut de recherche sur la paix

internationale de Stockholm, qui classe pour la première fois le régime communiste... en 2019. La Chine occupe aussi le cinquième rang des pays exportateurs d'armes derrière les États-Unis, la Russie, la France et l'Allemagne. La Chine ne se contente pas de son arrière cour mais vend au Venezuela de Maduro ou trouve des débouchés en Afrique comme en Tanzanie façon de se rappeler que le patriarche tanzanien J. Nyerere a été très inspiré par la révolution de la commune populaire chinoise.

- Il y a dix ans, l'Empire du Milieu dépendait encore largement des importations de Russie et d'Ukraine pour son armement. Il ne lui aura pas fallu longtemps pour devenir autonome, une certitude même si les statistiques sont difficiles à mobiliser car tout est verrouillé au nom de la sécurité nationale. Bien qu'il n'existe pas de statistiques officielles sur les exportations d'armes, le Sipri note que ce secteur s'est développé à un point tel en Chine « qu'il existe une demande accrue pour ses armes à l'étranger » et des consortiums organisés Aviation Industry Corporation of China (AVIC), China North Industries Group Corp (NORINCO), China Electronics Technology Group Corp (CETC), et China South Industries Group Corp (CSCG). Cette performance qui ne laisse pas de l'inquiéter. À un double titre. Non seulement la hausse des exportations accroît le risque de prolifération mais la Chine est aussi, sur la scène mondiale, un pays non-signataire du Traité sur le commerce des armes (ATT) adopté en 2013 par l'ONU pour moraliser ce commerce.

Doc. 3 : les bases militaires chinoises indiennes américaines et françaises dans l'Océan indien

- Même si le président Indien Narendra Modi se fait le porte-parole d'un océan indiens, la carte fournie montre que l'Océan est une zone d'influences, et de consolidation de puissances... Au-delà de bases traditionnelles, la focale de ce document porte sur le « trop fameux collier » de perles chinois. Plutôt imaginé par la CIA comme menace d'où son nom emprunté à un groupe de rock californien string of pearls, le collier de perles désigne ici 15 points d'ancrage de la puissance chinoise qui reçoit des concessions (Coco, Hambantota) des postes d'observation sur la route du détroit d'Ormuz Gwadar, des postes d'observation des détroits de Malacca (Chittagong) des bases balisant les routes de la soie maritimes et/ou sécurisant les approvisionnements énergétiques chinois.
- Derrière cette présence il y a des fondements de l'exercice de la puissance chinoise rénovée par :
 - le tropisme vers la mer initié dès la création des zones franches en 1980 et s'enrichir en chinois se dit aller à la mer ;
 - la volonté de la Chine de dépasser le consensus mou qui lui avait fait accepter que les problèmes soient neutralisés à partir de 2004 dans le cadre de bonnes relations avec l'Asean ;
 - la volonté de la Chine de regarder vers le continent africain par le relais de la mer vers Monbasa ou zanzibar vieux ports d'accostage des bateaux chinois depuis l'amiral Zheng he ;
 - la volonté de la Chine de favoriser ses capacités à se projeter maritime-ment de là des crédits à la hausse dans ce secteur ;
 - la volonté de compléter ses corridors intérieurs (Bangladesh Pakistan par des débouchés Maritimes). La charpente du colosse n'est donc pas que le squelette des routes de la soie terrestres mais aussi les ports.

Doc. 7 : sur les armées chinoises l'armée rouge en 1930 et l'armée populaire de libération aujourd'hui

- Partir de l'armée rouge en 1930 est une bonne façon de mesurer le chemin parcouru. Dans l'entre-deux guerres la Chine est débordée par des seigneurs de la guerre qui possèdent des armées de taille variables dont le seul but est de siphonner les richesses d'une région armées privées formées de paysans pauvres intégrés parfois par des bandits prédateurs des milices locales des corps d'autodéfense le nombre n'est pas la qualité 200 000 soldats en 1928 au Sichuan en 1932, 3 % de la société sont sous les armes, 130 guerres opposent entre eux sur fond de trafic d'opium et de banditisme. L'armée rouge ici représentée est un élément de la conquête par les communistes du pouvoir. La base est au Jingxi et celle de Eyuwan dans les hauteurs qui séparent le Hubei, le Henan et l'Anhui. L'armée rouge compte 200 000 soldats ; elle résistera aux raids des armées du Guomindang entre 1930 et 1933 et avec Lin Biao elle se restructure comme armée mobile déterminée, qui attaque par surprise ou abandonne le terrain tactiquement à l'adversaire pour mieux résister c'est ainsi que peut être mis en place une république des soviets du Jiangxi peuplée de 2 à 5 M de personnes et la longue marche va être une façon de contourner la 5^e campagne d'anéantissement par un parcours de 12 000 km vers le nord Shanxi (1935).
- Aujourd'hui l'armée populaire de libération sans être des plus modernes a d'autres atouts mais « *les Chinois sont dans un programme de rattrapage ; ils viennent de très loin* », Jean-Vincent Brisset. En effet, l'armée populaire de libération chinoise (PLA) date de l'ère maoïste, et dispose d'un matériel assez obsolète. « *En 2002, l'armée chinoise équivalait à la moitié de l'armée espagnole en termes de matériel et de formation. Aujourd'hui, elle a seulement rejoint son niveau. Les pilotes, en particulier, ne sont pas très bien formés* », précise le chercheur. En 1991 la première guerre du Golfe a créé un choc en montrant le retard technologique des fantassins chinois. L'APL est désormais une priorité une armée prête au combat au service d'une stratégie de puissance avec des moyens plus crédibles d'interdiction et de dissuasion. Ses effectifs seront réduits à 2M d'hommes (moins 300 000) plus qualifiés depuis le budget progresse ; l'intégration civil militaire est croissante et la grande question qui demeure est que la Chine n'a pas d'expérience de conflits depuis 1979. En voulant donner une leçon aux Vietnam elle a été acculée à une semi défaite et ce ne sont pas les escarmouches avec l'Inde sur la frontière disputée au Ladakh, dans le nord de l'Inde, en juin 2020 premier accrochage militaire meurtrier en 45 ans entre les deux géants asiatiques qui vont notoirement changer la donne. La capacité balistique et nucléaire chinoise même si la parité avec les EU n'est pas atteinte sont les leviers de sa puissance, l'équipement des troupes reste en deçà du statut officiel de la Chine prochain leader de l'économie mondiale.

Ce sont peut-être là les vrais pieds d'argile de la Chine. La Chine attend selon XI Jining lui-même une « armée de classe internationale pour 2049 ». La Chine possède désormais la plus grande armée du monde en nombre et le deuxième budget de défense, lequel connaît une croissance annuelle de l'ordre de 10 %. La question n'est pas de savoir si et quand elle rattrapera les États-Unis, si elle devient pour l'ancien secrétaire d'État

britannique aux Affaires étrangères, David Miliband, la « nation indispensable du XXI^e siècle », formule jadis employée par Madeleine Albright et Bill Clinton à propos des États-Unis mais quel est son véritable potentiel aujourd'hui. Personne ne connaît aujourd'hui avec une certitude absolue l'état de sa puissance militaire conventionnelle, qui fait l'objet de toutes sortes de spéculations. D'un côté, obsédés par la « menace chinoise », certains milieux en Occident tendent parfois à en exagérer l'ampleur tandis que, de l'autre, Beijing, calculateur, s'emploie à l'évidence à dissimuler ses capacités réelles. Toutefois, quels que soient les progrès accomplis par une puissance émergente sur le plan de la modernisation militaire *stricto sensu*, ils ne seront vraisemblablement pas suffisants pour remettre radicalement en question la suprématie militaire des États-Unis dans un avenir proche, si l'on s'en tient aux standards conventionnels de la puissance militaire. Même avec deux porte-avions, des missiles braqués sur l'île voisine, ils n'ont pas encore la capacité militaire de s'opposer aux Américains qui veillent sur Taïwan. L'armée chinoise mobilise certes le 2^e budget militaire du monde (175 Mds de \$) hors budget de R&D et celui consacré à la dissuasion nucléaire. Les progrès de la marine sont impressionnants, l'industrie des armements fait de la Chine un exportateur gagnants des clients en Asie du Sud comme le Pakistan chasse réservée des Russes mais la Chine n'a pas de groupe aéronaval opérationnel et de réelles capacités de projection (le D Day sur Taiwan est différé) la coordination des armées est un défi et la Chine a beaucoup à apprendre dit-elle des Russes en Syrie ou de l'opération Vostok. Alors se pose les moyens d'une véritable hégémonie chinoise.

Les documents 5 et 6 de Pierre Grosser spécialiste des relations internationales (*l'Histoire du monde se fait en Asie 2017*) et d'Antoine Bondas (*Chine Corée du Nord des otages mutuels*) posent la véritable question au-delà de l'inventaire militaire.

La Chine a-t-elle les moyens ou se donne-t-elle les moyens de passer d'une stratégie régionale à une stratégie globale d'un NOEI surtout à l'heure où elle est vécue par les EU comme un concurrent ou une menace stratégique.

- La Chine ne peut effacer un passé où l'ordre régional était naturellement ordonné autour de sa culture, de ses valeurs, de sa supériorité intrinsèque (hiérarchie oblige) et au-delà un système dit de vassalisation oblige. Le modèle défini sous la dynastie Han de 206 av. J.C. à 220 av. J.C. et généralisé sous la dynastie Tang (618-907) fait que 72 États tributaires apportent une offrande régulière reconnaissant la suprématie de l'Empereur. Pour M. Duchâtel, « le tribut est théorisé comme le seul mode de relations extérieures permettant d'assurer durablement la sécurité ». Sous les Ming et encore aujourd'hui ce système est au cœur de l'ordre stable en Asie que la Chine veut perpétuer... à son profit ? De là, par exemple, la capacité de la Chine à rebondir sur l'enterrement par D. Trump du partenariat pour le Pacifique et la mise en place d'une alternative que Pékin est « prêt à accélérer » la mise sur pied de zones de libre-échange alternatives. Le gouvernement chinois a déjà engagé la création d'un Partenariat économique intégral régional (RCEP) qui associe les dix pays membres de l'Association des nations du Sud-est asiatique (Asean) et leurs partenaires régionaux (Japon, Australie, Inde, Corée du Sud, Nouvelle-Zélande).

- Désormais, la Chine doit se penser différemment et elle a plusieurs impératifs qui complexifient sa longue marche de colosse :
 - La Chine doit reconquérir la place qui fut la sienne dans l'Histoire du monde, c'est-à-dire la première. Cf. la « Grande divergence » de Kenneth Pomeranz. La Chine se prévaut d'une civilisation de 3500 ans, avec une forte unité culturelle. Il s'agit de se « redresser de retrouver une place dignement dans le concert des nations et d'apporter de nouvelles et plus grandes contributions à l'humanité ».
 - Redéfinir son rôle de grand pays en développement et ses solidarités avec les pays du Tiers-monde. BAII banque asiatique d'investissement dans les infrastructures 2015.
 - Conforter son statut de Brics et si possible en assurer le leadership banque de développement des Brics en 2014.
 - Adopter des règles qui lui soient sinon favorables du moins, moins restrictives.
 - « Faire référence » : mot d'ordre ambitieux qui repose sur « un discours internationaliste où XI Jinping prétend « *contribuer au bien commun et au développement de tous les pays* ». C'est le message subliminal des routes de la soie de la diplomatie du « win-win » en Afrique. NB par un projet multilatéral car dès le départ basé sur le bilatéralisme même si plateforme interétatiques (17 + 1 en Europe orientale).
 - Être capable de se réinventer. Le plan horizon 2025 procède de la volonté de passer de l'état d'atelier du monde à celui de laboratoire du monde et de devenir une puissance industrielle de premier plan dans des secteurs comme la robotique, le biomédical les véhicules autonomes la 5G bref des secteurs de l'avenir en lieu et place des exportations classiques de biens de qualité souvent médiocre et à prix cassés.
 - Montrer une aptitude opiniâtre à incarner un modèle de développement économique et de gouvernance, cette culture du socialisme à caractéristique chinoise « *La Chine cherche à promouvoir une solution chinoise pour le monde et à s'imposer comme puissance idéologique* » (Claude Meyer, *L'Occident face à la renaissance de la Chine*, 2018). Elle ambitionne d'être une puissance normative avec la création de standards de normes techniques en comptant sur la masse des chinois et les économies d'échelle liées pour s'imposer (cf. la question de l'utilisation des OGM par exemple). Comme le souligne D. Cohen « *Si chaque chercheur a une chance égale de trouver dans sa vie une idée majeure, alors les idées nouvelles seront majoritairement chinoises et indiennes à la fin du siècle !* » D. Cohen. *Lang Lang*¹
 - Promouvoir l'idée que croissance économique prime sur hégémonie idéologique. Pour le ministre des affaires étrangères chinois les routes de la soie « ne sont pas un projet géopolitique mais une volonté d'améliorer le niveau de vie ».
 - Défendre l'idée que les problèmes asiatiques doivent être résolus par et entre les Asiatiques. Cette stratégie passe notamment par l'Asian infrastructure investment bank (AIIB), bras armé de la nouvelle route de la soie, ainsi que par la China Development Bank (CDB), deux institutions

1. Piano « black diamond » système spiro R ébène de Macassar Indonésie, Chine 2^e client de Steinway.

publiques. La dette est ainsi une arme à double tranchant, participant du développement des nations tout en fragilisant leur souveraineté.

- Et bien sûr adapter son rayonnement à son ascension économique ; notamment en utilisant le soft power. Dans leur programme de rattrapage le soft power est un des moteurs. Il ne se limite pas au seul Lang Lang, le seul pianiste au monde qui joue sur un piano fabriqué spécialement pour lui par Steinway en ébène de Mascara ! Chaque jour un des 525 instituts Confucius établis dont 173 dans 41 pays européens, ou un des membres d'une active diaspora de plus de 50M de membres, ou une rafale de communiqués de l'agence Xinhua sont les relais de l'influence chinoise.

Proposition de développement à l'aval des points débattus en amont

La question posée se décline en plusieurs interrogations :

- suffit-il de sédimenter des performances pour être une superpuissance ou une grande puissance ?
- l'horizon 2049 que la Chine s'est fixé traduit-il une capacité à attendre et à rester au milieu du gué ou une difficulté à accéder plus rapidement à une place de leader ?
- la Chine qui a longtemps revendiqué sa volonté d'être une puissance régionale responsable a-t-elle les moyens de proposer les voies d'un nouvel ordre mondial multilatéral face aux défaillances de l'Occident ?
- peut-on raisonnablement faire du soft power chinois et d'un modèle... de dictature numérique ou du hard power chinois encore éloigné des performances américaines les bases d'une hégémonie chinoise incontestée ?
- l'avenir de superpuissance de la Chine ne pose-t-il pas la question de la légitimité à renouveler du PCC, de l'isolement relatif de la Chine et de moyens de puissance décalés ?

1. L'ascension de la Chine dans l'ordre international fait désormais de la Chine une grande puissance, dont les performances sont souvent exceptionnelles

A. La Chine : un colosse dans ses performances et surtout leur rapidité : un poids lourd économique 0,6 % du commerce mondial en 1977, plus de 10 % dès 2016 / Chine 2^e investisseur dans le monde une contribution annuelle à la croissance globale 30 % de 2013 à 2016 soit plus que Japon EU UE réunies la Chine partenaire incontournable internationalisation des normes chinoises à l'ISO (3^e RM).

B. La Chine : un colosse par les défis qu'elle relève : la montée en puissance dans l'intelligence artificielle / la conquête de l'espace / la course à la mer / la remontée des filières...

C. La Chine : un colosse par les grandes peurs qu'elle suscite sans son étranger proche et à l'échelle planétaire, rapport à Taiwan 23^e province chinoise, à Hong Kong en normalisation à marche forcée, au Japon dans la quête de positions fortes en mer de Chine, face à l'Inde par une vigilance de tous les instants sur la ligne de fracture himalayenne et sur l'océan indien, face aux EU en apparaissant comme menace stratégique directe.

2. Des mutations de la Chine paraissent viser un statut de grande puissance mais avec des « caractéristiques propres » parfois synonymes de faiblesses

A. La Chine engage une stratégie de militarisation où priment projection, maritimisation et expansion via des infrastructures (OBOR, collier de perles, modernisation de l'APL) mais les objectifs en demi-teinte : puissance militaire régionale, un poids lourd mais pas une puissance (2030 revenu par hab. de la Chine encore un tiers du revenu américain) même si la Chine est première puissance économique diplomatie d'influence.

B. La Chine engage une stratégie où la diplomatie du tribut est relayée par une diplomatie tutélaire : le théorique *win win* chinois : le respect mutuel entendu... comme respect de ses intérêts propres, une vision stratégique de long terme qui a pour horizon seulement 2049, une gestion correcte des différences qui place le dialogue avant les résultats mais avec des tensions frontales (Japon, EU face aux sanctions, Taiwan si un indépendantisme menace, rétorsions si Huawei entravé pour la 5G).

C. La Chine engage une stratégie alternative aux déficiences des occidentaux et en capacité de proposer un nouvel ordre mondial : mais la Chine qui gère ses intérêts dans le monde est-elle pour autant capable d'administrer le monde ? Ambiguïté du soft power, difficulté à dépasser ses propres intérêts (cf. minerais stratégiques). Diplomatie des forums mais avec quels effets d'entraînements ?

3. La Chine est « un géant fragile » (V. Niquet) dont les ambitions se heurtent à des contraintes multiples

A. Le risque d'isolement (« démocratie » pervertie – crédit social) les camps d'éducation Ouïghours qui la mette quasiment au ban du monde, des alliances très minoritaires Pakistan et Corée du Nord) le respect de plus en plus flou du principe de non-ingérence (cf. les 5 non).

« *Nous poursuivons toujours la pratique des « cinq non » dans nos relations avec l'Afrique, à savoir : ne pas s'ingérer dans la recherche par les pays africains d'une voie de développement adaptée à leurs conditions nationales, ne pas s'immiscer dans les affaires intérieures africaines, ne pas imposer notre volonté à l'Afrique, ne pas assortir nos aides à l'Afrique de condition politique quelconque, et ne pas poursuivre des intérêts politiques égoïstes dans notre coopération en matière d'investissement et de financement avec l'Afrique.* » Comment peut-elle concilier une forte introversion intérieure qui l'isole avec le durcissement du régime, le contrôle des populations... et une forte extraversion extérieure qui l'amène à renoncer à des principes (non-ingérence non-emploi en premier de la dissuasion ?).

B. Le risque d'un développement au péril de l'environnement et inégal

– La Chine est confrontée à une crise écologique et Pékin est polluée 10 mois sur 12

« *l'airpocalypse* » qui faisait 1,6 M de morts en 2016 et frappaient 460 M de personnes a-t-il quelques raisons de disparaître du jour au lendemain ?

– Les 4 Chine : une réalité tenace (T. Sanjuan) ?

– Son économie est mue par le libéralisme économique mais elle demeure une économie planifiée et ralentie par un secteur public qui fournit la

moitié des productions chinoises. On déplore les très fortes inégalités de richesses qui perdurent en Chine. La pauvreté a été réduite mais des écarts considérables entre villes modernes et campagnes quasi féodales, où l'on vit avec moins de 200 USD par an, se maintiennent. Sans pessimisme excessif beaucoup s'inquiètent de ces dysfonctionnements de la Chine qui pourraient imposer une introversion intérieure, un durcissement du régime la mise en sommeil de toute prétention extérieure pour un pays qui certes est loin devant l'Inde (1978 le Chinois avaient des revenus inférieurs à ceux des Indiens désormais ils sont 4 fois plus riches) mais derrière deux autres Brics (le Brésil et la Russie). La crise sanitaire a dévoilé au grand jour des manipulations de l'information, des responsabilités dans l'extension de la pandémie que ses adversaires ont voulu exploiter (Donald Trump, adversaire de l'OMS).

C. Le risque d'une surévaluation permanente ?

- « Surévaluation de ses capacités militaires d'abord. La Chine est une puissance militaire de premier rang avec des vulnérabilités importantes, M. Duchâtel. Elle construit des porte-avions mais n'a pas de groupe aéronaval opérationnel, ce qui limite sérieusement sa projection de puissance ; ses sous-marins sont bruyants et ses capacités de lutte anti-sous-marine très limitées, ce qui lui pose des problèmes en matière de dissuasion nucléaire et d'opérations navales ; sa capacité à mener des opérations conjointes entre ses différentes armées demeure un immense défi et accuse un retard par rapport aux États-Unis et les forces de l'Otan même en mort cérébrale ! ; l'armée de terre reste encore trop dominante par rapport aux autres forces.
- Surévaluation de ses capacités économiques : La Chine change de cap. Sa population vieillit et se rapproche de celle de l'Italie et du Japon avec un indice de fécondité parmi les plus bas (1,62 enfant par femme). C'est un frein. Cependant dire comme Isabelle Attané qu'elle est à bout de souffle car elle a des problèmes de retraite de démographie est un peu réducteur. La croissance chinoise a d'autres blocages à surmonter. Évaluer la puissance chinoise dans un ordre international doit prendre en compte qu'au-delà des performances il y a une réalité plus prosaïque : un revenu moyen faible pour que le modèle soit efficace exceptionnel et exportable.
- Et si la Chine reste au milieu du gué du statut de grande puissance globale. Prédire pour la Chine est un exercice courant : le jour où la Chine s'éveillera depuis Napoléon mais les questions demeurent :
 - La puissance chinoise sera-t-elle canalisée par le multilatéralisme dont elle devient soudain un rempart ?
 - Dépasser le cadre asiatique pour la Chine peut-il se faire dans l'harmonie et la communauté de destin prônée au travers des routes de la soie terrestres et maritimes depuis 2013 ?
 - Le PCC pourra-t-il être le régulateur de ces transformations. Les « valeurs asiatiques » sont censées favoriser l'harmonie par le consensus plutôt que le conflit régulé, la continuité de l'action gouvernementale plutôt que l'alternance, l'intérêt collectif et la famille plutôt que les droits de l'individu. Sont présentées comme une alternative aux valeurs libérales démocratiques de l'Occident par le PCC au pouvoir. Celui-ci n'hésite pas à leur attribuer le mérite du fantastique décollage dont un demi-milliard

de Chinois ont profité. Le monopole du parti unique sur le pouvoir est-il le seul avenir de la Chine. La Chine pourra-t-elle longtemps faire valoir son histoire, sa permanence historique (Thomas Gomart) pour légitimer le recouvrement de sa puissance stratégique ?

Conclusion :

Mais au regard des déclinés programmés des Empires, des questions légitimes demeurent et pas seulement pour la Chine. Pourra-t-on faire du XXI^e siècle un siècle américain comme l'aurait été le XX^e ?

Quelles réponses aux urgences seront-elles prioritaires pour continuer d'exercer une influence ? Climat, inégalités, ressources, pandémies, 6^e continent ?

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S U J E T

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x e^{x(y^2+z^2+1)}$$

- 1) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer le seul point critique A de f .
- 3) a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A .
b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A . Préciser la valeur de ce minimum.
- 4) a) Montrer que, pour tout (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , $f(x, y, z) \geq x e^x$.
b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b) ?
- 5) On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire $(C) : \begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C) , f présente un minimum global au point $(1, 0, 0)$. Quelle est sa valeur ?
- 6) On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte $(C') : x(y^2+z^2+1)=1$.
Montrer que f possède un maximum global sous la contrainte (C') . En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0; \theta]$, où θ (theta) désigne un réel strictement positif.

1) On note f une densité de X , F sa fonction de répartition, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

- Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x et θ .
- Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Dans la suite, on suppose que le réel θ est inconnu et on en propose deux estimateurs. Pour construire ces estimateurs, on dispose d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de la loi de X , ce qui signifie que X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et de même loi que X .

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, elle aussi, définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

a) On rappelle qu'en Scilab, la commande `grand(x,y,'unf',a,b)` simule $x \times y$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a; b]$. Écrire des commandes Scilab permettant d'entrer les valeurs des variables qui sont nécessaires et de simuler Y_n .

b) On note F_n la fonction de répartition de Y_n . Pour tout réel x , écrire $F_n(x)$ à l'aide de $F(x)$ puis déterminer explicitement $F_n(x)$.

- En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n .
- Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ .

3) On pose maintenant $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer $E(Z_n)$ puis proposer un estimateur \widehat{Z}_n , construit de façon affine à partir de Z_n , et qui soit un estimateur sans biais de θ .

Définition

On dit qu'un estimateur T_n de θ est d'ordre de convergence $\alpha > 0$ lorsque la suite $(n^\alpha (T_n - \theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas quasi-certainement nulle.

4) a) Utiliser le théorème de Slutsky pour établir le résultat suivant : si une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire R et si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers le réel a , alors la suite $(a_n R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire aR .

b) Dédire de ce résultat l'unicité de l'ordre de convergence d'un estimateur (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'un estimateur T_n de θ possède deux ordres distincts, α et β , avec par exemple $0 < \alpha < \beta$).

5) On considère, dans cette question, une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ et on pose $Y = -T$. Déterminer la fonction de répartition, que l'on notera F_Y , de Y .

6) a) Justifier que, pour tout réel x positif ou nul, on a $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n supérieur à $-\frac{x}{\theta}$, on a l'égalité :

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n$$

c) Établir enfin que $n(Y_n - \theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y . Conclure quant à l'ordre de convergence de Y_n .

7) a) Justifier que $\widehat{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2X_i)$, où \widehat{Z}_n est l'estimateur présenté à la troisième question.

b) On pose $\widehat{Z}_n^* = \sqrt{n} \frac{\widehat{Z}_n - E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}$. En appliquant le théorème limite central à la suite de variables

aléatoires $(2X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que \widehat{Z}_n^* converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\widehat{Z}_n^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta} (\widehat{Z}_n - \theta)$ et en déduire que $\sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$. Donner l'ordre de convergence de \widehat{Z}_n .

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on désigne par E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f , le réel, noté $\text{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

- a) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
- b) Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(Id - p)$
- c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :

$$\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$$

2) Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si E_1, \dots, E_k sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E , notés p_1, p_2, \dots, p_k , et on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

3) Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- 4) a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- c) Établir finalement l'égalité :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

- 5) a) Montrer que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
- b) En déduire que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0$.
- c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
x=1:n
u=-----
disp(u)
```

b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0; 1[$.

a) Pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout t de $[0; x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries

de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

c) Soit x un réel élément de $[0; 1[$. On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

et $b_k = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

ii) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
x=input('entrez une valeur pour x : ')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=-----
b=-----
c=-----
disp(c)
```

iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

Dans cette partie, on désigne toujours par x un réel de $[0;1[$.

- 4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

b) En déduire que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

- 5) a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\ln u \leq u$.

- b) En déduire que la série de terme général $(\ln n)x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6) On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n$.

- a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1c), que : $\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$

- b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$

- 7) a) Étudier les variations de la fonction f .

- b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8) a) En remarquant que $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)x^n$, montrer que l'on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x.$

- b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f .

- c) On admet que f est continue sur $[0;1[$. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 1

1. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2 + 1) \end{cases}$ est C^2 sur \mathbb{R}^3 car polynomiale.

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto e^t \end{cases}$ est C^2

Donc par composition $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto e^{x(y^2+z^2+1)} \end{cases}$ est C^2 sur \mathbb{R}^3

La projection $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x \end{cases}$ est C^2 sur \mathbb{R}^3

Donc f est bien C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 en tant que produit de fonctions C^2

2. $M(x, y, z)$ est point critique de f ssi $(S) : \nabla(f)(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$(S) : \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x, y, z) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y, z) = 0 \\ \partial_3(f)(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x(y^2+z^2+1)}(1 + (y^2 + z^2 + 1)x) = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \end{cases}$$

$$(S) : \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y^2 + z^2 + 1)x = 0 \\ 2x^2y = 0 \\ 2x^2z = 0 \end{cases}$$

On a forcément $x \neq 0$ sinon la première équation n'a pas de solution puisque qu'elle s'écrirait $1 = 0$

Donc nécessairement $y = z = 0$ et $x = -1$

Le seul point critique de f est le point $(-1, 0, 0)$

3. a) f étant C^2 , d'après le théorème de Schwarz, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \partial_{12}^2 f(x, y, z) = \partial_{21}^2 f(x, y, z)$ et de même $\partial_{13}^2 f(x, y, z) = \partial_{31}^2 f(x, y, z)$ ainsi que $\partial_{23}^2 f(x, y, z) = \partial_{32}^2 f(x, y, z)$

$$\partial_{11}^2 f(x, y, z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(y^2+z^2+1)(2+(y^2+z^2+1)x) \quad \partial_{22}^2 f(x, y, z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(2x^2+4x^3y^2)$$

$$\partial_{33}^2 f(x, y, z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(2x^2+4x^3z^2) \quad \partial_{12}^2 f(x, y, z) = e^{x(y^2+z^2+1)}2xy(2+(y^2+z^2+1)x)$$

$$\partial_{13}^2 f(x, y, z) = e^{x(y^2+z^2+1)}2xz(2+(y^2+z^2+1)x) \quad \partial_{23}^2 f(x, y, z) = 4x^3yz e^{x(y^2+z^2+1)}$$

b) Au point critique, la Hessienne est $\begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ e & 2 & 0 \\ 0 & e & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$

Cette matrice est diagonale, ses valeurs propres sont les termes diagonaux $\frac{1}{e}$ et $\frac{2}{e}$ qui sont non nuls et positifs. Donc f admet un minimum local au point critique $M(-1, 0, 0)$ qui vaut $\frac{1}{e}$

4. a) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 + z^2 + 1 \geq 1$

Si $x \geq 0$ $x(y^2 + z^2 + 1) \geq x$ et par croissance de l'exponentielle $e^{x(y^2+z^2+1)} \geq e^x$
 ainsi $xe^{x(y^2+z^2+1)} \geq xe^x$

Si $x < 0$, $x \geq x(y^2 + z^2 + 1)$ donc $e^x \geq e^{x(y^2+z^2+1)}$ ainsi en multipliant par x qui est négatif,
 $xe^{x(y^2+z^2+1)} \geq xe^x$

b) La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x \end{cases}$ est C^1 sur \mathbb{R} . Sa dérivée s'annule en -1 en changeant de signe et elle présente un minimum global en ce point qui vaut $\frac{-1}{e}$. Or $f(-1, 0, 0) = \frac{-1}{e}$.
 Ainsi, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) \geq f(-1, 0, 0)$ donc le minimum est global.

5. Notons $g_1(x, y, z) = x$ et $g_2(x, y, z) = y + z$ les formes linéaires associées à la contrainte C

Si f possède un minimum global au point $M_0(1, 0, 0)$ alors nécessairement $\forall H(h, k, l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H \in C, f(M_0 + H) \geq f(M_0)$

Soit H un tel point, $M_0 + H \in C \iff \begin{cases} 1 + h = 1 \\ k + l = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h = 0 \\ k + l = 0 \end{cases}$

$f(M_0 + H) - f(M_0) = (1 + h)e^{(1+h)(k^2+l^2+1)} - e = e^{k^2+l^2+1}$

Or $\forall (k, l) \in \mathbb{R}^2, k^2 + l^2 + 1 \geq 1$ donc $e^{k^2+l^2+1} \geq e$

Donc on a bien démontré que $\forall H(h, k, l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H \in C, f(M_0 + H) \geq f(M_0)$ ainsi f présente un minimum global sous la contrainte. Ce minimum prend la valeur e

6. La fonction de contrainte $\phi : (x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2 + 1)$ est C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^3

$\nabla(\phi)(x, y, z) = (y^2 + z^2 + 1, 2xy, 2xz)$. La contrainte n'est donc pas critique sur l'ouvert puisque la première coordonnée de son gradient ne s'annule nulle part.

Si f possède un extremum sous la contrainte C' au point (x, y, z) alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$(S) : \nabla(f)(x, y, z) = \lambda \nabla(\phi)(x, y, z)$

$(S) : \begin{cases} e^{x(y^2+z^2+1)}(1 + (y^2 + z^2 + 1)x) = \lambda(y^2 + z^2 + 1) \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = \lambda 2xy \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = \lambda 2xz \end{cases}$

Mais $(x, y, z) \in C'$ donc $(S) : \begin{cases} 2e = \lambda(y^2 + z^2 + 1) \\ 2ex^2y = \lambda 2xy \\ 2ex^2z = \lambda 2xz \end{cases}$

$f(M_0 + H) - f(M_0) = (1 + h)e^{(1+h)(k^2+l^2+1)} - e = ((1 + h)e - e)$

Mais $(1 + h) = \frac{1}{(k^2 + l^2 + 1)}$ donc $0 < 1 + h \leq 1$ donc $f(M_0 + H) - f(M_0) \leq 0$

Ainsi $\forall H(h, k, l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H$ vérifie aussi la contrainte on a $f(M_0 + H) - f(M_0) \leq 0$ donc f présente un maximum global en $(1, 0, 0)$ sous la contrainte C'

Exercice 2

$$1. \text{ a) } F_X(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

$$\text{b) } E(X) = \frac{\theta}{2} \quad V(X) = \frac{\theta^2}{12}$$

$$2. \text{ a) } \begin{aligned} n &= \text{input}('n') \\ \theta &= \text{input}('theta') \\ Y_n &= \text{max}(\text{grand}(1, n, 'unf', 0, \theta)) \end{aligned}$$

$$\text{b) Soit } x \in \mathbb{R}, F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right)$$

Les variables X_i étant mutuellement indépendantes et suivant la même loi que X , on a :

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = F(x)^n$$

$$\text{D'où } F_n(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

- c) F est la fonction de répartition d'une variable à densité, elle est continue sur \mathbb{R} et C^1 sauf éventuellement en 0 et θ . F_n étant la composée de F et de la fonction C^1 qui à tout réel t associe t^n est donc continue sur \mathbb{R} et C^1 sauf éventuellement en 0 et θ .

F_n est donc la fonction de répartition d'une variable à densité, dont une densité est donnée en tout point x où F_n est C^1 par $F'_n(x)$ et la valeur arbitraire 0 en 0 et θ

$$\text{Soit } f_n(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } x \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$$

- d) Y_n possède une espérance car son support est compact et

$$E(Y_n) = \int_0^\theta n \frac{x^n}{\theta^n} dx = \frac{n}{(n+1)\theta^n} \theta^{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta$$

D'autre part, Y_n est une fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendante du paramètre à estimer donc c'est un estimateur de θ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = \theta \text{ donc } Y_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } \theta$$

3. Z_n admet une espérance en tant que somme finie de variables admettant une espérance et par linéarité $E(Z_n) = \frac{\theta}{2}$

Posons $\widehat{Z}_n = 2Z_n$ alors \widehat{Z}_n est une fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendante du paramètre à estimer et $E(\widehat{Z}_n) = \theta$ donc c'est un estimateur sans biais de θ

4. a) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|a_n - a| \geq \varepsilon) = 0$ et $R_n \xrightarrow{L} R$ donc $a_n R_n \xrightarrow{L} aR$ d'après le théorème de Slutsky

- b) Soit T_n un estimateur de θ possédant deux ordres de convergence α et β avec $0 < \alpha < \beta$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n^\alpha = n^{\alpha-\beta} n^\beta (T_n - \theta)$$

$$\text{Posons } a_n = n^{\alpha-\beta}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$n^\beta (T_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire R qui n'est pas quasi certainement nulle.

Donc en appliquant le lemme précédent, $(a_n n^\beta (T_n - \theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ va converger en loi vers la variable certaine nulle, ce qui n'est pas possible puisque $a_n n^\beta (T_n - \theta) = n^\alpha (T_n - \theta)$

5. $Y(\Omega) =]-\infty, 0]$

Soit $x > 0$, $F_Y(x) = 1$

Soit $x \leq 0$, $F_Y(x) = P(-T \leq x) = P(T \geq -x) = 1 - P(T \leq -x) = e^{-\frac{x}{\theta}}$

6. a) Soit $x \geq 0$, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = P(Y_n \leq \theta + \frac{x}{n}) = F_n(\theta + \frac{x}{n}) = 1$
car $\theta + \frac{x}{n} \geq 1$

b) De la même manière, si $x < 0$ et $n \geq \frac{-x}{\theta}$ alors $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = F_n(\theta + \frac{x}{n})$
avec $0 \leq \theta + \frac{x}{n} < \theta$ donc

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \frac{1}{\theta^n} (\theta + \frac{x}{n})^n = (1 + \frac{x}{n\theta})^n$$

c) Soit $x \geq 0$, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1 = F_Y(x)$

Si $x < 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $n \geq \frac{-x}{\theta}$ et $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = (1 + \frac{x}{n\theta})^n$

Or pour tout $n \geq n_0$, $(1 + \frac{x}{n\theta})^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n\theta})}$

Et $n \ln(1 + \frac{x}{n\theta}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\theta}$ donc par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n\theta})^n = e^{\frac{x}{\theta}}$

On a ainsi démontré que pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n(Y_n - \theta) \leq x) = F_Y(x)$

Donc $n(Y_n - \theta) \xrightarrow{L} Y$ et Y_n est d'ordre de convergence 1

7. a) $\hat{Z}_n = 2Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2X_i)$

b) \hat{Z}_n^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à la suite de variables indépendantes $(2X_i)$ qui possèdent même espérance $E(2X)$ et même variances $V(2X)$ donc d'après le théorème limite central \hat{Z}_n^* converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

c) $E(2X) = 2(E(X)) = \theta$ $V(2X) = 4V(X) = \frac{\theta^2}{3}$ donc $\hat{Z}_n^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta} (\hat{Z}_n - \theta)$

Comme \hat{Z}_n^* converge en loi vers une variable aléatoire centrée réduite alors $\sqrt{n}(\hat{Z}_n - \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{3}} \hat{Z}_n^*$
converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$

Donc $\sqrt{n}(\hat{Z}_n - \theta)$ converge en loi vers une variable non quasi-certainement nulle et par unicité de l'ordre de convergence, celui-ci vaut $\frac{1}{2}$

Exercice 3

1. a) Le théorème du rang permet d'écrire que $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p))$

$$\text{Soit } x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \text{ alors } \begin{cases} p(x) = 0 \\ \exists y \in E \quad x = p(y) \end{cases}$$

$$p(x) = 0 = p^2(y) = p(y) \text{ donc } p(y) = 0 \text{ donc } x = 0.$$

$$\text{Ainsi } \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \subset \{0\} \text{ et comme } 0 \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \text{ alors } \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$$

$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) \\ \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\} \end{cases} \text{ donc } E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$$

- b) Soit $x \in \text{Im}(p)$ alors $\exists y \in E, x = p(y)$

$$\text{Donc } x - p(x) = p(y) - p^2(y) = p(y) - p(y) = 0 \text{ donc } x \in \text{Ker}(Id - p) \text{ donc } \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(Id - p)$$

$$\text{Réciproquement, si } x \in \text{Ker}(Id - p) \text{ alors } x = p(x) \text{ donc } x \in \text{Im}(p) \text{ d'où } \text{Ker}(Id - p) \subset \text{Im}(p)$$

$$\text{Donc } \text{Im}(p) = \text{Ker}(Id - p)$$

- c) Le polynôme $X^2 - X$ étant annulateur, les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1

Si p est un projecteur trivial (Id ou θ) alors sa matrice dans toute base est diagonale donc p diagonalisable.

Si p n'est pas un projecteur trivial alors $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(Id - p) = E$ donc p est diagonalisable.

Ainsi dans une base de diagonalisation, la matrice de p s'écrit avec $\dim(\text{Ker}(p))$ zéros sur la diagonale et $\dim(\text{Ker}(p - Id))$ uns sur la diagonale donc

$$\text{Tr}(p) = \dim(\text{Ker}(p - Id)) = \dim(\text{Im}(p)) = \text{rg}(p)$$

2. Initialisation : soit E_1 un sev de E alors $\dim(E_1) \leq \dim(E_1)$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n non nul tel que pour tout E_1, \dots, E_n sev de E on ait $\dim(E_1 + \dots + E_n) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$

Soit E_{n+1} un sev alors

$$\dim(E_1 + \dots + E_{n+1}) = \dim(E_1 + \dots + E_n) + \dim(E_{n+1}) - \dim(E_1 + \dots + E_n) \cap E_{n+1}$$

$$\text{Donc } \dim(E_1 + \dots + E_{n+1}) \leq \dim(E_1 + \dots + E_n) + \dim(E_{n+1})$$

Et en appliquant la récurrence à l'ordre n : $\dim(E_1 + \dots + E_{n+1}) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n) + \dim(E_{n+1})$

3. Supposons que $p_i \circ p_j = \theta$ si $i \neq j$

$$\text{Alors } q_k^2 = \sum_{i=1}^k p_i^2 + \sum_{(i,j) \in [1,k], i \neq j} p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i^2 = \sum_{i=1}^k p_i = q_k$$

Donc q_k est un projecteur.

4. a) Soit $x \in \text{Im}(q_k), \exists y \in E, x = q_k(y) = (p_1 + \dots + p_k)(y) = p_1(y) + \dots + p_k(y)$

$$\text{Or } \forall i \in [1, k], p_i(y) \in \text{Im}(p_i)$$

$$\text{Donc } x \in \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k) \text{ d'où } \text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$$

$$b) \text{ Par linéarité de la trace, } \operatorname{Tr}(q_k) = \dim(\operatorname{Im}(q_k)) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^k \dim(\operatorname{Im}(p_i))$$

D'après la question précédente, on a $\dim(\operatorname{Im}(q_k)) \leq \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k))$

$$\text{Et comme } \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)) \leq \sum_{i=1}^k \dim(\operatorname{Im}(p_i))$$

Alors nécessairement $\dim(\operatorname{Im}(q_k)) = \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k))$

Ainsi les deux ensembles ont même dimension donc $\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$

- c) Montrons que la somme $\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$ est directe en montrant que 0 se décompose de manière unique.

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in \operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$ tel que $0 = x_1 + \dots + x_k$

Donc $\exists (y_1, \dots, y_k) \in E, 0 = p_1(y_1) + \dots + p_k(y_k)$

On applique p_1 à cette égalité :

$$p_1(0) = 0 = p_1^2(y_1) + 0 \text{ car si } j \neq 1, p_1 \circ p_j = \theta$$

Or $p_1^2(y_1) = p_1(y_1) = x_1$ donc $x_1 = 0$

On démontre de même que $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_j = 0$ ainsi la décomposition de 0 est unique et la somme est directe.

5. a) Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, montrons que $\operatorname{Im}(p_j) \subset \operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Ker}(Id - q_k)$ ainsi pour tout $x \in E$ on aura $p_j(x) \in \operatorname{Im}(p_j)$ et donc $p_j(x) - q_k(p_j(x)) = 0$ ce qui achèvera la démonstration.

Soit $x \in \operatorname{Im}(p_j)$, alors $0 + 0 + \dots + x + \dots + 0 \in \operatorname{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_j) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$
 or $\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_j) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$ donc $x \in \operatorname{Im}(q_k)$

$$b) \text{ Soit } x \in E \text{ alors } p_j(x) = q_k \circ p_j(x) = p_j \circ p_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0$$

- c) Soit $x \in E$. Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, par unicité de la décomposition sur la somme directe $\operatorname{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$ on a :

$$p_j(x) = 0 + \dots + p_j(x) + \dots + 0 = p_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$$

Or pour $i \neq j$, on a $0 \in \operatorname{Im}(p_i)$ mais aussi $p_i(p_j(x)) \in \operatorname{Im}(p_i)$ donc nécessairement $p_i(p_j(x)) = 0$ car la somme est directe.

Comme cela est vrai pour tout $x \in E$ alors $p_i \circ p_j = \theta$

Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j, p_i \circ p_j = \theta$

6. On a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur à savoir que $p_1 + \dots + p_k$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j, p_i \circ p_j = \theta$

Problème

1. a) $u = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$

b) Soit $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[k, k+1]$ et décroissante.

Donc, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

Donc par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \text{ soit}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [1, n]$, on a : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \text{ et en rajoutant } \frac{1}{n} \text{ de chaque côté : } \frac{1}{n} \leq u_n \text{ donc } u_n \geq 0$$

De même on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$

D'où en sommant, cette fois entre 1 et $n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n)$

En changeant d'indice dans la somme et en ajoutant et ôtant 1 côté gauche :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln n \text{ donc } u_n \leq 1$$

2. a) $\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t}$ (car $t \neq 1$)

b) Les fonctions intervenant dans la question précédente étant continues sur $[0, x]$, on peut intégrer :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Soit par linéarité de l'intégrale dans la somme finie à gauche :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) $\forall t \in [0, x]$, $1-t \geq 1-x \geq 0$ donc $\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$

D'autre part $\forall t \in [0, x]$, $\frac{t^n}{1-t} \geq 0$

On peut intégrer ces deux inégalités entre 0 et x et les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = 0$ puisque $x \in [0, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ et ainsi par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

d) On peut ainsi passer à la limite dans l'égalité de la question b) et la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p}$ admet pour limite $-\ln(1-x)$ donc la série converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j} = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=j}^n b_{k-j}$
(inversion de containtes $1 \leq j \leq k \leq n$)

D'autre part $(\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{k=0}^n b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^n b_j$

Or, tous les termes intervenants étant positifs, $\sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=j}^n b_{k-j} \leq \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=0}^n b_k$

donc $\sum_{k=1}^n c_k \leq (\sum_{j=1}^n a_j)(\sum_{k=0}^n b_k)$

On montre de même que $\sum_{k=1}^{2n} c_k \geq (\sum_{j=1}^n a_j)(\sum_{k=0}^n b_k)$

- b) Les séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, soit A et B leurs sommes respectives. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\sum_{j=1}^n a_j)(\sum_{k=0}^n b_k) \leq AB$

D'après la question précédente, on en déduit que la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum c_n$ est majorée donc la série converge, soit C sa somme.

Par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on a ainsi $C \leq AB \leq C$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \leq (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n)(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k)$

- c) i. La convergence de la série de terme général a_k a été démontrée à la question 2d. Quant à la série de terme général b_k , il s'agit du terme général d'une série géométrique convergente puisque $0 < |x| < 1$

ii. $a = (x \cdot \wedge u) \cdot \wedge u$
 $b = [1, x \cdot \wedge u]$
 $c = \text{sum}(a \cdot *b(v))$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

4. a) On applique ce qu'on a vu dans la première partie. Les séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$ sont à termes positifs et convergent. La série c_n construite sur ces 2 séries et dont on vient de calculer le terme générique $c_n = x^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ converge et on a l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n})(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)$$

- b) On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et que d'après la première partie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

Donc $x^n \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$

5. a) Par concavité du logarithme, $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1 \leq x$
 b) $\forall n \geq 1, 0 \leq (\ln n)x^n \leq nx^n$

Or la série à termes positifs de terme général nx^{n-1} est convergente en tant que série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $0 < |x| < 1$ donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum (\ln n)x^n$ converge.

6. a) $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$

$$\text{Donc } 0 \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n - (\ln n)x^n \leq x^n$$

$$\text{Donc } \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n - x^n \leq (\ln n)x^n \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n$$

Les termes intervenant dans cette inégalité sont les termes généraux de séries convergentes, on peut donc sommer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n - x^n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)x^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Soit, en remplaçant par le résultat des questions précédentes, la formule demandée.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{-\ln(1-x)} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{x}{-\ln(1-x)} = 1$$

$$\text{Ainsi par encadrement } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{-\ln(1-x)} = 1 \text{ donc } f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

7. a) Soit $(x, x') \in [0, 1[$, $x \leq x'$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (\ln k)x^k \leq \sum_{k=1}^n (\ln k)x'^k$ soit, en sommant, $f(x) \leq f(x')$ donc f est croissante.

$$b) f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 0 = 0$$

$$\text{On sait que } f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\ln(X)}{X} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

8. a) Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x)$ est la somme d'une série à termes positifs donc $f(x) \geq 0$

$$\forall n \geq 2, \ln(n) \leq n \text{ ainsi, } \forall k \in [2, n], \sum_{k=2}^n \ln(k)x^k \leq \sum_{k=2}^n kx^k$$

Or la série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente, $\sum_{k \geq 1} kx^{k-1}$ admet pour somme $\frac{1}{(1-x)^2}$

Comme $\sum_{k=2}^n kx^k = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - x$ alors par passage à la limite (toutes les séries convergent) dans l'inégalité, on obtient $f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x$

- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(1-x)^2} - x = 0$ donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f continue à droite en 0

$$\text{Soit } x \in [0, 1[, 0 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^2} - 1 = 0$ donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

- c) L'intégrale est impropre en 1.

$$f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Etudier la convergence de cette intégrale en 1 revient à étudier la convergence en 0 de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt \text{ par le changement de variable } C^1 \text{ bijectif affine } t \rightarrow 1-t$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} [(\ln t)^2]_{\varepsilon}^1 = \frac{-\ln(\varepsilon)}{2}$ qui n'admet pas de limite finie lorsque ε tend vers 0 donc l'intégrale est divergente.

ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE DU MONDE CONTEMPORAIN

DURÉE : 4 HEURES.

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages, sauf justification par la qualité du résultat. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

Le modèle social français est-il à bout de souffle ?

CORRIGÉ

Par Éric Keslassy, professeur en CPGE au sein de la Prépa Commerciale, à Paris.

Analyse du sujet :

Ce sujet renvoie à la troisième partie du Module IV du programme de deuxième année qui porte sur les politiques sociales. Les trois chapitres qui constituent cette partie peuvent être mobilisés : « Justice sociale et légitimation de l'intervention publique », « Les politiques de lutte contre les inégalités » et « État-providence et protection sociale ».

Il s'agit donc d'un sujet qui est bien répertorié dans le programme et il ne surprendra que les étudiants qui continuent à croire que la sociologie ne peut donner des intitulés d'écrit.

La formulation de l'énoncé est assez classique et on peut prévoir un plan en trois parties : I) Le modèle social français rencontre des difficultés importantes... II)... Et même s'il conserve encore quelques points forts... III)... Il convient de le réformer pour lui redonner de la vigueur devant les défis qui l'attendent.

Il reste à s'interroger sur ce que signifie précisément le terme « modèle social » et s'il existe une spécificité française.

Le concept de modèle social renvoie à celui d'État providence, soit un État qui se préoccupe du bien-être de la population en mettant en place des politiques de protection sociale. Dans la typologie de Gosta-Esping Andersen, proposée dans *Les trois mondes de l'État providence* (1990), il existe trois grands modèles historiques de l'État providence : l'État providence libéral qui repose sur la responsabilité individuelle et en grande partie sur le marché pour la poursuite de ses objectifs sociaux (comme aux États-Unis) ; l'État providence conservateur corporatiste qui possède des racines dans la logique bismarckienne établie à la fin du XIX^e siècle ; et l'État providence

social-démocrate qui se fonde théoriquement sur les recommandations de William Beveridge qui datent du milieu du XX^e siècle.

On peut ici saisir la grande spécificité du modèle social français qui ne trouve plus aujourd'hui sa place dans cette classification. Initialement, la protection sociale française était largement organisée autour de la logique d'assurance (soit l'approche bismarckienne). La création de la sécurité sociale en 1945 repose sur ce principe : les actifs cotisent pour être protégés en cas de réalisation des risques sociaux (comme la maladie). Mais depuis le milieu des années 1980, on assiste à une « revanche de l'assistance » (assistance qui relève de la logique beveridgienne). Outre les minimas sociaux, deux grandes mesures incarnent ce « reversement » : la création du RMI en 1988 – devenu depuis le RSA ; et la mise en place de la CMU en 2000.

La particularité du modèle français est donc d'être dual : il repose sur l'assurance pour les actifs (et leur famille) et sur l'assistance pour ceux qui vivent en dessous d'un certain seuil de revenus.

Cela explique pourquoi, par exemple, les inégalités économiques et sociales sont moins fortes en France que dans des pays comme les États-Unis. Un enjeu de ce sujet est ainsi d'expliquer en quoi le modèle social français reste important/nécessaire et se montre tout de même résilient. Cela renvoie à notre II. Pour autant, cela n'empêche pas ce modèle social de connaître des difficultés importantes, comme l'indique l'expression « à bout de souffle » de l'énoncé. Un autre enjeu de ce sujet est d'analyser et de comprendre ces difficultés. Nous le ferons dans le I.

Enfin, si le modèle social français est « à bout de souffle », il y a nécessité de le réformer. C'est aussi un impératif au regard des défis à venir comme la stagnation séculaire ou encore le développement durable.

Proposition de plan détaillé :

I. Le modèle social français rencontre des difficultés importantes...

En actualisant son/le propos, il est possible dans cette première partie de retenir les axes choisis par Pierre Rosanvallon pour décrire *La crise de l'État providence* (1981) : crise financière, crise d'efficacité, et crise de légitimité.

A. Le modèle social français affronte des difficultés budgétaires depuis le début des années 1980...

Le modèle social français fonctionnait très bien lors des Trente Glorieuses, notamment parce que la croissance économique était très forte. Si bien que les dépenses sociales étaient contenues et les recettes fiscales bien suffisantes. La stagflation des années 1970 commence à poser des difficultés budgétaires à l'État providence : la croissance économique est beaucoup plus faible et le chômage augmente. L'économie française se heurte ensuite à un chômage de masse : et elle conserve globalement jusqu'à aujourd'hui un taux persistant de chômeurs de longue durée. La montée du chômage permet de comprendre la crise budgétaire à laquelle est confronté le modèle social français : les allocations-chômage augmentent (ce qui accroît considérablement les dépenses sociales) tandis que les cotisations sociales baissent (puisque les chômeurs cotisent moins que les actifs occupés). Il apparaît ainsi un « effet ciseau » (dépenses qui augmentent, recettes qui

baissent) qui se traduit par un déficit public conséquent. Les autres branches du modèle social se trouvent dans des situations proches : pour des raisons démographiques, le système de retraite est très déficitaire ; principalement en raison du progrès technique qui rend les soins de plus en plus onéreux, la branche maladie est également longtemps restée déficitaire.

Les déficits sociaux alimentent les déficits publics qui nourrissent la dette publique. Or, la France est liée à ses partenaires de la zone euro par des traités qui imposent d'avoir des déficits publics de moins de 3 % du PIB et une dette publique de moins de 60 % du PIB. Aussi, l'action publique sur le plan social s'effectue-t-elle sous la contrainte de finances publiques dégradées et devant respecter les engagements européens. Les marges de manœuvre, sur le plan social, sont donc réduites...

B. Le modèle social français n'est pas toujours efficace...

La montée du chômage de masse dans les années 1980 a démontré que le modèle social français n'est pas toujours efficace. C'est ainsi que les chômeurs de longue durée ont pu « tomber » dans l'exclusion sociale, en partie parce qu'ils n'étaient pas pris en charge par le système de protection sociale (qui, depuis 1945, protégeait d'abord les actifs occupés). La figure du SDF, émergence alors comme représentation de l'échec du modèle social à la française. Aussi, lui a-t-il fallu évoluer vers plus d'assistance avec le RMI (1988) et la CMU (2000). Outre que ces dispositifs alourdissent la facture du Trésor public (cf. A), ils ne se sont pas nécessairement révélés suffisants. C'est particulièrement prégnant dans le cas du RMI conçu initialement comme un partenariat vers le retour à l'emploi : l'État devait accorder cette allocation en contrepartie d'efforts de la part du bénéficiaire pour retrouver le chemin du travail. Très vite, pourtant, on se rend compte que les allocataires du RMI ne possèdent pas nécessairement les capitaux nécessaires pour reprendre un emploi, si bien que finalement, dans les faits, l'aide n'impose plus de contrepartie. Le RMI a été réformé en 2007 : il existe dorénavant un RSA socle (soit le RMI sans l'exigence de contrepartie) et le RSA activité (qui incite au travail en ajoutant une allocation au salaire lorsque l'emploi n'octroie qu'un bas revenu). Force est de constater que cette réforme n'est pas suffisante : 1/3 des bénéficiaires potentiels du RSA socle n'y ont pas recours pour de multiples raisons (honte sociale, complexité administrative ou encore manque d'information sur ses droits). De fait, la pauvreté atteint aujourd'hui des niveaux très importants : ce sont près de 9 millions de personnes qui vivent avec un revenu qui se situe en dessous du seuil de pauvreté. Les travailleurs pauvres sont également nombreux en raison de la croissance des formes particulières d'emplois (comme les CDD ou le temps partiel).

La crise d'efficacité du modèle social français s'incarne aussi dans le maintien de puissantes inégalités scolaires : la « reproduction sociale » (Pierre Bourdieu) et les différentes formes de déclassement social qui se développent témoignent d'un système scolaire « à bout de souffle ».

Une autre façon de discuter de l'efficacité du modèle social français est de souligner que, pour ces résultats contrastés, le niveau des prélèvements obligatoires est très élevé (aujourd'hui, la France a le taux de prélèvement obligatoire le plus important d'Europe). Il est donc difficile d'augmenter les impôts pour fournir plus de ressources aux administrations de protection sociale. Et le consentement à l'impôt devient un enjeu majeur...

C. Le modèle social français se heurte à une crise de légitimité...

Le consentement à l'impôt, socle fondamental du modèle social français, est aujourd'hui de plus en plus discuté : on peut parler de « ras-le-bol fiscal » des citoyens (comme l'illustre le début de la révolte des Gilets jaunes). Si les citoyens français sont moins enclins à accepter leur contribution fiscale, c'est qu'il ne voit pas toujours concrètement à quoi servent leurs impôts. Avec un tel niveau de prélèvement obligatoire, comment peut-on expliquer ce niveau de pauvreté ? Cette question fait intervenir celle de la légitimité de l'intervention économique et sociale de l'État : puisque l'État providence n'est pas efficace, est-il bien légitime de le financer ? Et, de suite, n'est-ce pas l'action sociale des pouvoirs publics qui n'est pas légitime ? Ce raisonnement est très présent dans les classes moyennes qui, tout en payant des impôts importants, reçoivent moins d'aides de l'État que les classes populaires et subissent fortement les phénomènes de déclassement social. Mais si la légitimité du modèle social français est remise en cause, c'est aussi parce qu'il faut constater, depuis le milieu des années 1980, un retour en force des idées libérales qui préconisent de faire confiance au marché et de réduire l'action de l'État à celle d'un État minimal. Nous sommes encore loin de cette perspective en France mais des raisonnements libéraux marquent tout de même fortement les esprits : c'est le cas de la Courbe de Laffer (« trop d'impôt tue l'impôt ») ou encore de l'idée d'assistanat (trappe à chômage ou trappe à inactivité : les aides sociales désinciteraient au travail). Ajoutons que dans le contexte d'une mondialisation de plus en plus concurrentielle, les libéraux regrettent que les cotisations sociales alourdissent le coût du travail, ce qui réduit la compétitivité des entreprises et génère du chômage néo-classique (raison pour laquelle Emmanuel Macron a souhaité annuler les cotisations sociales chômage salariales et augmenter la CSG qui portent sur tous les types de revenu). Au fond, l'efficacité économique supposerait de réduire la « voilure » du modèle social français...

II. ... Et même s'il conserve encore quelques points forts...

A. La protection sociale est nécessaire sur le plan économique...

Le raisonnement libéral est loin d'être partagé par tous les économistes. Au contraire, aujourd'hui, il s'est formé un consensus empirique autour de l'idée que la lutte contre les inégalités est absolument nécessaire pour retrouver de/augmenter la croissance économique. Des institutions internationales comme l'OCDE ou le FMI sont dorénavant sur cette ligne. Le modèle social français est, à cet égard, mieux placé qu'une grande partie des PDEM puisqu'il parvient, grâce à la redistribution qu'il met en place, à conserver un niveau d'inégalités économiques et sociales relativement limité. Les aides sociales profitent bien en moyenne aux plus défavorisés mais il faut aussi penser aux services publics (transports, éducation, santé, logements sociaux, etc.) qui forment les outils de redistribution les plus puissants. Au total, avant intervention de l'État (impôts et prestations sociales), le rapport interdécile en termes de niveau de vie est de 21,1 en 2018 : le niveau de vie des 10 % les plus défavorisés est 21,1 fois plus faible que celui des 10 % les plus favorisés ; après intervention de l'État, le rapport interdécile de niveau de vie n'est plus que de 5,7 !

Ainsi, le modèle social français permet de lutter contre les inégalités économiques et sociales, ce qui est favorable à l'accès au capital humain de toute la population et permet de gagner des points de croissance économique.

B. Le modèle social français est résilient face aux crises économiques...

Par ailleurs, le modèle social français a montré toute son importance face aux crises économiques, tant celle de 2007-2008 que celle, plus récente, de la Covid-19. On se situe ici dans une logique keynésienne : les mesures de protection sociale agissent comme des « stabilisateurs automatiques » qui, jusqu'à un certain point, permettent de réduire les effets d'une crise économique. Il en est ainsi de l'assurance-chômage. Un chômeur voit ses revenus baisser, ce qui le conduit à réduire sa consommation. Les allocations-chômage vont permettre, au moins un temps, d'empêcher que la chute soit trop brutale. De même que les autres prestations sociales aident davantage les plus défavorisés, soit ceux qui ont la propension marginale à consommer la plus forte. Par les « stabilisateurs automatiques », le modèle social français agit comme un dispositif contra-cyclique qui se révèle très précieux en cas de choc de demande négatif.

On peut d'ailleurs procéder à une comparaison franco-américaine des actions de l'État en matière de relance de la croissance économique à la suite d'une crise économique pour démontrer l'importance du modèle social français en la matière : comme les États-Unis ont fait le choix d'un modèle social libéral, la protection sociale « publique » est peu importante – si bien que les « stabilisateurs automatiques » sont très faibles –, l'État se trouve dans l'obligation d'effectuer une relance de très grande ampleur (forte hausse des dépenses publiques) pour contrer les effets d'une crise économique ; une relance conjoncturelle bien plus significative que celle de la France (ou, plus largement, de la zone euro) qui peut compter sur son modèle social plus complet (et, donc, sur des « stabilisateurs automatiques » plus puissants, qui agissent comme des outils de stabilisation de la conjoncture).

C. L'échec du ruissellement...

Une autre façon de « défendre » le modèle social français est de montrer que le modèle libéral n'est pas efficace. Pour favoriser l'investissement productif et donc l'emploi, Emmanuel Macron a réformé l'ISF (Impôt de solidarité sur la fortune), en exemptant les placements financiers : devenu l'IFI (Impôt sur la fortune immobilière), cet impôt frappe désormais uniquement le patrimoine immobilier. Suivant la logique mise en place dans les pays d'Europe du Nord, le gouvernement français a également choisi de fixer l'impôt sur les revenus du capital à 30 % (il s'agit d'une *flat-tax*) – contre une taxation progressive auparavant. Même si ce n'est pas reconnu comme tel par les autorités françaises, l'objectif de ces mesures et de faire jouer un effet de « ruissellement » (qui provient des théories libérales) : les plus riches ayant des revenus plus élevés, ils peuvent investir dans l'appareil productif et/ou dans les innovations ce qui, à terme, doit créer des emplois pour le plus grand nombre. Ce mécanisme du « ruissellement » ne fonctionne pas, notamment parce que les plus riches n'ont pas confiance dans l'avenir. Ils préfèrent donc épargner les revenus supplémentaires, obtenus par la

baisse de la fiscalité, ce qui *in fine* ne favorise ni la croissance économique, ni les finances publiques qui, dès lors, ont moins de latitude pour agir sur le plan de la justice sociale.

III. ... Il convient de le réformer pour lui redonner de la vigueur devant les défis qui l'attendent.

Le modèle social français – comme les systèmes de protection sociale des autres pays – doit être réformé parce qu'il est en crise (cf. I) mais aussi parce que des défis importants se dressent devant lui : la stagnation séculaire ou le développement durable.

Remarque : *cette partie ne comporte que deux grands arguments car quasiment chacun des éléments du premier point (III-A) peuvent être développés de façon plus longue et ainsi constituer deux sous-parties.*

A. Comme les autres PDEM, l'économie française se heurte à la stagnation séculaire, ce qui a un impact sur le modèle social qui doit être repensé...

La stagnation séculaire peut se définir comme un ralentissement de la croissance économique de long terme. D'une certaine façon, les PDEM – donc la France – devraient s'habituer à un régime économique de faible croissance, ce qui rend plus difficile de créer des emplois et d'obtenir des ressources fiscales importantes. Une explication est à trouver dans les innovations qui sont moins productives que par le passé. Par contre, le progrès technique a tendance à polariser le marché du travail et on peut par exemple, s'interroger sur la pertinence des propositions qui entourent la mise en place du revenu universel.

Remarque : *le débat autour du revenu universel peut très bien être amené autrement et constituer un argument en tant que tel.*

En dehors des transformations technologiques, Robert Gordon a recensé six « vents contraires » qui justifient en partie l'idée de stagnation séculaire et donnent des axes de réflexions sur les réformes à mener dans le cadre modèle social français :

- Le vieillissement de la population suppose de repenser le système de retraite. On peut ici discuter du système universel voulu par Emmanuel Macron. Est-ce un moyen de redonner du « souffle » à notre modèle social ?
- Sortir du pallier éducatif doit conduire à réformer l'école dans le sens d'une plus grande égalité des chances ; comment changer le système scolaire pour qu'il soit plus juste et plus efficace ?
- Mettre en place un système fiscal plus juste, plus progressif, de façon à lutter contre les inégalités économiques et sociales qui entravent la croissance économique. Et, également, investir davantage dans le capital humain pour réduire ces inégalités.
- Le coût de la mondialisation peut être limité par des stratégies de relocalisation et/ou des réformes du type TVA sociale (qui permettent de concilier efficacité économique et justice sociale). De nouvelles ressources économiques pour l'État pourraient être obtenues en assujettissant les

FMN – et en particulier des GAFAs – à de nouvelles taxes et en luttant contre l'évasion fiscale (comme la France souhaite le faire). Des propositions difficiles à concrétiser vont également dans ce sens comme « la mondialisation de la redistribution » (François Bourguignon) ou l'idée d'un impôt mondial sur le capital (Thomas Piketty). Des ressources fiscales supplémentaires qui pourraient être consacrées à la lutte contre les inégalités économiques et sociales.

- Les contraintes environnementales sont étudiées en B. *Cela permet de faire transition...*

B. Le modèle social français face au développement durable...

Les inégalités sociales et les inégalités environnementales vont souvent de pair. L'exemple de la hausse de la taxe environnementale sur les carburants de 2018 en atteste : ce sont les travailleurs les plus défavorisés qui ont le plus besoin de leur voiture (ils ont dû s'éloigner des centres d'activité économique, comme les villes, en raison du prix élevé des loyers). Il ne serait donc pas possible de lutter contre les contraintes environnementales sans tenir compte de la justice sociale. Pour tenir ensemble ces deux objectifs, Eloi Laurent propose, dans *Le bel avenir de l'État providence* (2014), de renforcer l'État providence dans le sens de la sociale-écologie. Cet « État social écologique » devra lutter contre les externalités négatives environnementales, indemniser les populations qui en ont besoin et mettre en place une fiscalité écologique adaptée. L'objectif serait de consolider à long terme notre stock de capitaux (naturel bien sûr mais aussi public, humain et social). Cela suppose de promouvoir une croissance faiblement carbonée tout en luttant contre les inégalités économiques et sociales. Ainsi, le risque de « vulnérabilité écologique » pourrait être associé à chacun des risques sociaux déjà existants.

ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE DU MONDE CONTEMPORAIN

SUJET

DURÉE : 4 HEURES.

*Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages, sauf justification par la qualité du résultat. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

ESCP
BS/
SKEMA
BS

SUJET

Faut-il craindre un retour de la concentration industrielle ?

CORRIGÉ

Par Éric Keslassy, professeur en CPGE au sein de la Prépa Commerciale, à Paris.

Analyse du sujet :

Il s'agit d'un sujet qui emprunte à de nombreux chapitres du programme, tant de première année (l'entreprise, la croissance, etc.) que de deuxième année (notamment autour des chapitres « Allocation des ressources et réglementation des marchés » et « Les politiques structurelles »). Mais cet énoncé renvoie également directement au programme d'économie approfondie, au travers de ses attentes en termes de micro-économie (autour des structures de marché et de la concurrence imparfaite).

Cette question de la concentration industrielle revient actuellement très fort dans le débat économique comme en atteste le récent livre de Thomas Philippon, *The Great Reversal. How America Gave up on Free Markets* (2019) – qui analyse les conséquences de la forte concentration des marchés américains. Il ne fait guère de doute qu'une référence à cet ouvrage sera valorisée par les correcteurs.

Comme pour toute dissertation d'ESH, il faut commencer par s'arrêter sur la définition des termes du sujet. La première expression à analyser est certainement « concentration industrielle ». Tout d'abord, il convient de préciser que le terme « industriel » ne renvoie pas ici uniquement au secteur secondaire (soit à l'industrie au sens strict). La formulation du sujet impose en effet une approche beaucoup large de l'industrie. Par exemple, dans ce cadre, on peut parler d'industrie bancaire (alors que les banques relèvent des services et du secteur tertiaire). La concentration bancaire étant un axe à exploiter dans ce devoir : l'émergence de « mastodontes bancaires » (Laurence Scialom) renforçant les risques de crises systémiques. *Nous avons fait le choix de ne pas y faire référence dans notre plan détaillé,*

ÉCONOMIQUE

ÉCONOMIE, SOCIOLOGIE ET HISTOIRE

mais il s'agissait incontestablement d'un argument convaincant. Aussi, un étudiant qui se contenterait d'analyser la question posée en se référant uniquement à l'industrie manufacturière risque vraisemblablement d'être durement sanctionné. Dans l'expression « concentration industrielle », il faut ensuite définir la concentration comme le processus au cours duquel la taille des entreprises s'accroît et que le poids relatif de celles qui sont déjà les plus importantes s'accroît. Plusieurs approches de la concentration industrielle doivent ensuite être introduites :

- Les modalités « juridiques » de la concentration industrielle prennent généralement deux formes : l'acquisition (une entreprise en achète une autre) ou la fusion (deux entreprises décident de s'associer pour n'en former plus qu'une seule).
- Les modalités « économiques » de la concentration industrielle sont généralement distinguées de la façon suivante : la concentration horizontale concerne le regroupement d'entreprises qui se situent dans la même branche d'activité (elles sont donc concurrentes) ; la concentration horizontale renvoie au regroupement d'entreprises complémentaires (il s'agit alors de mieux maîtriser l'ensemble de son processus de production et de distribution) ; et la concentration congglomérale désigne le regroupement d'entreprises qui se situent dans des branches d'activité complètement différents.

Remarque : *il est hautement souhaitable de définir ces termes en introduction pour ensuite les utiliser « librement » dans son développement.*

Notamment dans le cas de la concentration horizontale, la concentration industrielle se traduit « mécaniquement » par une réduction du nombre d'entreprises sur un marché et cela conduit à un affaiblissement de la concurrence. Mais même dans les deux autres cas évoqués (verticale et congglomérale), la concentration industrielle permet à des entreprises d'avoir des tailles plus importantes et ainsi de détenir un pouvoir de marché plus fort, ce qui limite également la concurrence.

Ainsi, *a priori*, la concentration signifierait qu'il y ait moins de concurrence sur les marchés : c'est le critère d'atomicité de la concurrence pure et parfaite qui serait mis à mal. *Il faut donc introduire la concurrence imparfaite (oligopole et monopole) dont le fonctionnement est étudié en économie approfondie.* Même si la question est plus complexe (cf. la théorie des marchés contestables, par exemple), lorsqu'on pense à la concentration industrielle, on est souvent ramené au développement des FMN (Firmes multinationales) qui, par des opérations de fusions et acquisitions, tendent à devenir des « géants » industriels. Compte tenu de leur puissant pouvoir de marché, ce sont les GAFAM qui ont, ces dernières années, polarisé l'attention.

Le sujet contient un autre terme très important : « retour ». Si l'énoncé évoque un retour, c'est que la concentration industrielle ne serait pas nouvelle : il y a déjà eu des périodes durant lesquelles la concentration industrielle était forte. Une première possibilité – ou un enjeu possible du sujet – est donc de revenir sur l'histoire du capitalisme pour montrer que, par le passé, les entreprises ont manifesté la volonté de s'éloigner du modèle de la concurrence pure et parfaite ; et de se demander si cette situation a été profitable ou pas.

Enfin, le sujet utilise la formulation classique « Faut-il » qui peut ici être comprise comme « est-ce légitime ». Autrement dit, un retour de la concentration industrielle serait-il inquiétant ? Est-ce légitime de le « craindre » ? On perçoit donc un autre enjeu du sujet : quelles sont les problèmes posés par la concentration industrielle ? Cette question nous met sur la piste d'un troisième enjeu : faut-il nécessairement chercher à limiter la concentration industrielle ? Si ce n'est pas le cas, point déjà mentionné, c'est que la concentration industrielle peut être profitable. Si ce n'est pas le cas, il convient alors de s'interroger sur les modalités disponibles pour favoriser la concurrence (au travers des politiques de la concurrence).

Proposition de plan détaillé :

I. Lorsque la concentration industrielle diminue l'intensité de la concurrence, comme cela a pu être le cas par le passé, elle peut se montrer néfaste et il convient de la combattre par des politiques de la concurrence...

A. La concentration industrielle peut éloigner de la concurrence pure et parfaite et desservir les consommateurs...

On peut s'appuyer sur l'école de Harvard pour montrer que la concentration industrielle, en éloignant les marchés de la concurrence et parfaite, est à l'origine de conséquences économiques néfastes. Il s'agit du modèle SCP : la structure de marché (S) détermine le comportement des entreprises (C), lequel explique leur performance (P). Sur un marché concentré (S), les entreprises peuvent développer plus aisément des comportements anticoncurrentiels, en s'entendant entre elles ou encore en abusant de leur position dominante (en établissant des barrières à l'entrée pour de potentiels concurrents) (C), ce qui conduit à des niveaux de prix et de profits élevés (P), au détriment des consommateurs et du bien-être collectif.

La concurrence pure et parfaite suppose que la condition d'atomicité soit réalisée. Cela suppose qu'aucune entreprise ne soit suffisamment importante pour avoir la capacité d'influencer le prix. Les entreprises sont alors « preneuses de prix » (*price takers*). Avec la concentration industrielle, les entreprises renforcent leur pouvoir de marché. Dans le cas de la concentration horizontale, les entreprises cherchent directement à réduire la concurrence pour devenir « faiseuses de prix » (*price makers*). Les structures de marché peuvent alors devenir oligopolistiques, voire monopolistiques. Dans le cas du monopole, il y aura une perte sèche que l'on peut représenter graphiquement (triangle d'Harberger) au détriment du consommateur (prix de vente supérieur à celui qui s'établirait en situation de CPP soit $p = C_m$). Dans le cas des oligopoles, situation intermédiaire entre la CPP et le monopole, les entreprises proposent un prix qui se situe entre le prix de la CPP et celui du monopole (que les entreprises soient en situation symétrique dans le cas de Cournot ou bien qu'il y ait une entreprise leader sur le marché dans le cas Stackelberg). En cas d'entente entre les oligopoleurs, c'est même le prix du monopole qui peut être atteint, ce qui est très défavorable au consommateur.

B. ... comme le montre l'histoire du capitalisme depuis la fin du XIX^e siècle, avec des vagues de concentration industrielle...

En observant l'histoire du capitalisme depuis la fin du XIX^e siècle, on peut constater qu'il y a déjà eu de nombreuses vagues de concentration industrielle. Ainsi, par exemple, aux États-Unis, à la fin du XIX^e siècle, par la concentration horizontale et verticale, Rockefeller a assuré la domination de la Standard Oil. L'entreprise « liquide » complètement la concurrence et sera considérée comme un monopole par les pouvoirs publics (cf. C). Carnegie (acier) ou Dupont de Nemours (chimie) usent alors de stratégies comparables aux États-Unis, mais on retrouve des phénomènes similaires au Japon (*zaibatsus*) ou en Allemagne (*Konzerns*) à la même période. Ces cartels profitent alors d'un avantage de taille (économie d'échelle), d'un avantage technologique, ou encore du contrôle d'un accès à une ressource rare pour imposer des tarifs élevés et/ou empêcher une concurrence potentielle d'apparaître. Cette situation est donc défavorable aux consommateurs et aux petits producteurs.

Une autre vague de concentration industrielle mérite d'être mentionnée : lors des Trente Glorieuses, à partir des années 1960 surtout, aussi bien aux États-Unis qu'en Europe, on assiste à l'émergence de « trusts » industriels qui dominent les marchés. L'objectif est à nouveau d'affaiblir – voire d'éliminer – la concurrence. Outre les prix élevés pour les consommateurs, la faible – ou pire encore l'absence de la – concurrence conduit les entreprises dominantes à réduire leur investissement.

C'est ce que montre Thomas Philippon, dans *The Great Reversal. How America Gave up on Free Markets* (2019), en analysant le capitalisme américain de ces vingt dernières années. L'économiste français explique qu'au cours de cette période plusieurs secteurs – télécoms, énergie, transport aérien... – ont connu une concentration importante. Ces « géants » industriels en profitent pour avoir des profits élevés au détriment des consommateurs, mais aussi des salariés (dont les revenus sont comprimés) et de la croissance économique (baisse de l'investissement productif et des innovations).

C. ... si bien que les pouvoirs publics réagissent en mettant en place des politiques de la concurrence.

Devant les conséquences néfastes de la concentration industrielle, les pouvoirs publics réagissent en mettant en place des politiques de la concurrence. Pionnière en la matière, la législation américaine commence à apparaître dès 1890 avec le *Sherman Act* (1890) – toujours en vigueur aujourd'hui – qui condamne les comportements d'entente illicite et les abus de position dominante (tentative de monopolisation). C'est à partir de cette loi que la *Standard Oil* sera démantelée au début du XX^e siècle.

Les États-Unis adoptent en 1914 le *Clayton Act* qui interdit les prix prédateurs et les concentrations d'entreprises qui visent à réduire la concurrence. Le respect de la concurrence est imposé par la FTC (*Federal Trade Commission*).

En Europe, il existe des législations nationales de la concurrence. Mais dans le cadre de ce devoir, il suffisait de faire référence à la politique de la concurrence européenne qui interdit les ententes illicites, prohibe l'abus de position dominante, surveille les concentrations et contrôle les subventions des

États-nations. L'objectif est d'obtenir un marché européen qui fonctionne suivant les principes d'une « concurrence libre et non faussée » (TFUE). L'école de Harvard peut également être mobilisée. Considérée comme « pessimiste », elle insiste sur le fait que les positions anticoncurrentielles des firmes peuvent être durables. Dès lors, l'État doit nécessairement agir. Il revient donc à la politique de la concurrence, de limiter la concentration industrielle, notamment en contrôlant le processus de fusion-acquisition (action sur S), et de mettre sous surveillance le comportement des grandes entreprises (action sur C), en engageant à leur encontre des actions antitrust, notamment pour abus de position dominante, afin de réduire les profits illégitimes de façon à améliorer le bien-être des consommateurs (résultat sur P).

II. ... Mais la concentration industrielle n'est pas toujours un obstacle au bien-être social

A. La concurrence imparfaite ne signifie pas la fin de la concurrence et le monopole peut être naturel...

Si la concentration industrielle accroît le pouvoir de marché des offreurs, il n'est pas toujours possible d'exercer ce pouvoir compte tenu de la rivalité, réelle ou potentielle, qui existent entre les producteurs. On peut alors commencer par expliquer et démontrer le duopole de Bertrand stipulant que, en cas de guerre des prix des duopoleurs, le prix du marché peut être celui de la CPP. Il faut ensuite introduire la théorie des marchés contestables de Baumol, Panzar et Willig (*Contestable markets and the theory of industry structure*, 1982) qui indique qu'une concurrence potentielle peut suffire à conduire un monopole à ne pas abuser de sa position dominante. Ce n'est donc pas le nombre de firmes présentes sur un marché qui déterminerait le niveau des prix mais plutôt l'absence de barrière à l'entrée (comme des coûts fixes irrécupérables).

Dans cet argument, il convient aussi d'expliquer et de démontrer que la concentration industrielle ne dépend pas seulement du comportement des entreprises (variable C dans le triptyque SCP du I-A), mais résulte aussi des caractéristiques naturelles du marché. Cela renvoie aux monopoles naturels (le graphique des tarifications est mobilisable ici). La concentration industrielle est alors dictée par des considérations d'efficacité économique et non par des comportements anticoncurrentiels.

B. ... d'autant que la concentration industrielle peut être favorable à la croissance économique par le bais des innovations...

Dans *Capitalisme, socialisme et démocratie* (1942), Joseph Schumpeter avançait que les grandes structures industrielles auraient davantage les moyens de financer des investissements en recherche et développement et donc de permettre l'apparition d'innovations. Elles pourraient obtenir des fonds bien plus facilement (confiance des banques et des investisseurs) que les petites entreprises. L'intuition de Schumpeter trouve aujourd'hui un prolongement dans la logique de « coopération » : les règles de la concurrence sont assouplies lorsque des entreprises se regroupent pour investir dans la recherche et développement afin d'aboutir à des innovations. S'il faut sans doute éviter que « *the winner takes all* », il peut être souhaitable

de laisser la concentration industrielle se mettre en place pour favoriser les innovations, sources de croissance économique.

C. ... et que la mondialisation change quelque peu la donne.

Les parts de marché des géants américains (comme les GAFAM) et asiatiques sont difficilement atteignables par des firmes nationales européennes. Aussi, peut-on se demander si les autorités de la concurrence européenne ne vont pas être tentés d'accepter davantage de fusions (du type Air France-KLM) afin de permettre l'émergence de champions européens capables de défier les grandes firmes américaines et asiatiques.

Par ailleurs, la mondialisation actuelle offre un cadre d'appréciation différent de la concentration industrielle comme le montre l'exemple du marché automobile. Il s'agit aujourd'hui d'un marché très concentré qui, pour autant, se révèle très concurrentiel. La demande est devenue plus exigeante tant sur le plan des prix (il existe une guerre des prix entre les firmes automobiles) que de la qualité (recherche de la différenciation verticale). Comme le nombre de consommateurs est devenu plus important (émergence des classes moyennes en Chine et en Inde), la concentration du marché automobile reste compatible avec la concurrence.

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EDHEC
BS

SUJET

Exercice 1

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2) a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n=3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que \mathcal{B} est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

- b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de \mathcal{B} .
- c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5) a) Écrire la matrice F de f dans la base \mathcal{B} . On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.

- b) En déduire les valeurs propres de f .

c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

2) On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

- a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y , définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .

- c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3) On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y .

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ , donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ , que l'on notera T_n , construit de façon affine à partir de S_n .

- b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X , puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$.

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ . En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ .

4) On rappelle qu'en Scilab, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i, j, 'nor', m, s)` simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2 .

Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
sigma=input('entrez la valeur de sigma :')
X=----- // simulations de X1,...,Xn
Y=----- // simulations de Y1,...,Yn
S=-----
T=-----
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q=1-p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1) Dans le cas où $n=1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X=k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y=i)$.

4) On rappelle les commandes Scilab suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

`grand(1, 1, 'uin', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

`grand(1, 1, 'bin', n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p .

`grand(1, 1, 'geom', p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

`grand(1, 1, 'poi', a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
n=input('entrez la valeur de n :')
p=input('entrez la valeur de p :')
X=-----
Y=-----
```

5) a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$P(Y=0) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

- 6) a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i \binom{k}{i-1} = k \binom{k-1}{i-1}$.
 b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

- c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

- 7) a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

- b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

- c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.
 d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

- 1) Pour tout n de \mathbb{N} , justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

- 2) Calculer I_0 et I_1 .

- 3) a) Pour tout n de \mathbb{N} , calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

- b) En déduire I_2 .

- c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
a=1/2
b=log(2)-1/2
for k=2:n
    aux=a
    a=-----
    b=-----
end
disp(b)
```

- 4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

- b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

- 5) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.

- 6) a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .

- b) En déduire la valeur de J_1 .

7) En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
J=log(2)
for k=1:n-1
J=-----
end
I=-----
disp(I)
```

8) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9) a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10) Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$

b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11) On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

12) Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$. b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$. c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$.

CORRIGÉ

Par Frédéric Brossard, professeur en CPGE à Intégrale, à Paris.

Exercice 1

On notera 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas vide car ${}^t 0 = 0 = -0$ donc $0 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$,

${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^t M + {}^t N$ par linéarité

or ${}^t M = -M$ et ${}^t N = -N$ donc ${}^t(\lambda M + N) = -\lambda M - N = -(\lambda M + N)$

d'où $\lambda M + N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on calcule ${}^t f(M)$:

$${}^t f(M) = {}^t ({}^t A)M + MA$$

Par linéarité et formule de la transposée d'un produit :

$${}^t f(M) = {}^t M({}^t A) + {}^t A^t M = {}^t M A + {}^t A^t M = -MA - {}^t AM \text{ car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$${}^t f(M) = -({}^t AM + MA) = -f(M)$$

Donc $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

- b) On a montré que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrons que f est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$,

$$f(\lambda M + N) = {}^t A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A = \lambda {}^t AM + \lambda MA + {}^t AN + NA = \lambda f(M) + f(N)$$

Donc f est une application linéaire de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. a) $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, (m_{ij})_{(i,j) \in [1,3]^2} \in \mathbb{R}/(S) : \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{Or } (S) \iff \begin{cases} 2m_{11} = 0 \\ 2m_{22} = 0 \\ 2m_{33} = 0 \\ m_{21} = -m_{12} \\ m_{31} = -m_{13} \\ m_{23} = -m_{32} \end{cases} \iff \begin{cases} m_{11} = 0 \\ m_{22} = 0 \\ m_{33} = 0 \\ m_{21} = -m_{12} \\ m_{31} = -m_{13} \\ m_{23} = -m_{32} \end{cases}$$

D'où $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} \\ -m_{12} & 0 & m_{23} \\ -m_{13} & -m_{23} & 0 \end{pmatrix}, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Soit $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \{m_{12}J + m_{13}K + m_{23}L, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3\}$

Donc $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(J, K, L)$ donc la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(S) : aJ + bK + cL = 0$

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

La famille (I, J, K) est donc libre. Etant libre et génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
On a donc $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$

$$4. \text{ a) } f(J) = ({}^tA)J + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(J) = -J - L$

On montre de même que $f(K) = 0$ et $f(L) = -L$

$$b) \text{ Im}f = \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \text{Vect}(-J - L, 0, -L) = \text{Vect}(-J - L, -L) = \text{Vect}(J, L)$$

(J, L) étant libre, (J, L) est une base de $\text{Im}f$ et $\dim(\text{Im}f) = \text{rg}(f) = 2$

$$c) \text{ D'après le théorème du rang : } \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \text{ donc } \dim(\text{Ker}f) = 1$$

Or $K \neq 0$ et $f(K) = 0$ donc $\text{Ker}f = \text{Vect}(K)$

5. a) La matrice de f dans la base \mathcal{B} s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et tous ses coefficients sont dans } \{-1, 0\}$$

b) F est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir -1 et 0

$$c) f + Id \text{ admet pour matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

$\text{rg}(f + Id) = \text{rg}(F + I) = 2$ car les 2 premières colonnes sont non colinéaires et la 3e est nulle.
Donc d'après le théorème du rang $\dim(\text{ker}(f + Id)) = 3 - 2 = 1$

or $f + Id = f - (-1)Id$ donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est 1 . On sait également que $\dim(\text{ker}f) = 1$ donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est 1

On en déduit que $\dim(\text{ker}f) + \dim(\text{ker}(f + Id)) = 2$ or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t) dt$

On procède au changement de variable affine C^1 bijectif $u = -t$

Alors $\int_{-\infty}^{-x} f_X(t) dt = \int_{+\infty}^x f_X(-u)(-du) = \int_x^{+\infty} f_X(-u)(du)$

Mais f_X étant une fonction paire, pour tout réel u , $f_X(u) = f_X(-u)$

Donc $F_X(-x) = \int_x^{+\infty} f_X(u)(du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)(du) - \int_{-\infty}^x f_X(u)(du) = 1 - F_X(x)$

2. a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ car $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Y = |X|$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(|X| \leq x)$

- si $x < 0, F_Y(x) = 0$

- si $x \geq 0, F_Y(x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x) = F_X(x) - (1 - F_X(x)) = 2F_X(x) - 1$

b) X étant une variable à densité, F_X est continue et C^1 sur \mathbb{R}

Par multiplication par la constante 2 et différence avec la constante 1, F_Y est continue sur \mathbb{R}_+ et C^1 sur \mathbb{R}_+

F_Y est continue sur \mathbb{R}_-^* et C^1 sur \mathbb{R}_-^* en tant que fonction constante nulle.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0$ et $F_Y(0) = 2F_X(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = F_Y(0)$ et F_Y continue en 0 donc continue sur \mathbb{R}

F_Y est donc une fonction de répartition continue sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0. C'est donc la fonction de répartition d'une variable à densité dont une densité est donnée par la dérivée de F_Y en tout point où F_Y est C^1 et en donnant une valeur arbitraire en 0 ainsi :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$ est absolument convergente donc si et seulement si (nullité de f sur \mathbb{R}^- et positivité sur \mathbb{R}^+) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$ converge.

Soit $A > 0, \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = -\sigma^2 \int_0^{\frac{A}{\sigma^2}} \left(-\frac{t}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$

$$\text{Donc } \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = -\sigma^2 [\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)]_0^A = \sigma^2 (1 - \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right))$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) = 0$ donc l'intégrale converge vers σ^2

Y possède une espérance et $E(Y) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^2 = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3. a) Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \end{cases}$

avec (Y_1, \dots, Y_n) n-échantillon de VAR indépendantes de même loi que Y et ϕ indépendante du paramètre à estimer. Donc $S_n = \phi(Y_1, \dots, Y_n)$ est un estimateur de σ

Par linéarité $E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(Y_k)$

avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y_k) = E(Y) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ donc $E(S_n) = \frac{1}{n} n \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

S_n est donc un estimateur de σ de biais $E(S_n) - \sigma = \sigma \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1 \right)$

En posant $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_n$, T_n reste un estimateur de σ et par linéarité $E(T_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E(S_n) = \sigma$

Ainsi T_n est un estimateur sans biais de σ

b) X admet un moment d'ordre 2 valant sa variance car X est centrée. Donc $E(X^2) = \sigma^2$

$Y = |X|$ donc $Y^2 = X^2$ donc $E(Y^2) = E(X^2) = \sigma^2$

D'après la formule de Koenig Huygens, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$

Avec (Y_1, \dots, Y_n) n-échantillon de VAR indépendantes et de même loi que Y on a par propriété de la variance :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Y_k)$$

avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V(Y_k) = V(Y) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$

donc $V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$

c) T_n étant un estimateur sans biais de σ , son risque quadratique est égal à sa variance, d'où par propriété de la variance :

$$r_n = V(T_n) = \frac{\pi}{2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ donc T_n est un estimateur convergent.

d) `X=grand(1,n,'nor',0,sigma)`

`Y=abs(X)`

`S=1/n*sum(Y)`

`T=sqrt(%pi/2)*S`

Exercice 3

- Pour $n = 1$ nécessairement $X = 1$, on pioche donc une boule dans V et Y prend la valeur 1 si la boule piochée est blanche ou 0 sinon. Les boules blanches étant en proportion p , $P(Y = 1) = p$ et Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p
- X indique le numéro de l'élément tiré lors d'un tirage équiprobable d'un élément parmi n éléments numérotés. Donc $X \hookrightarrow \mathbb{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_{[X=k]}$ indique le nombre de boules blanches obtenues, i.e. de succès, lors de la répétition de k épreuves de Bernoulli indépendantes (remise) de paramètre p on en déduit que $Y_{[X=k]} \hookrightarrow \mathbb{B}(k, p)$

Ainsi $Y_{[X=k]}(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket$ et $P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{pour } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{pour } i > k \end{cases}$

- $X = \text{grand}(1, 1, 'uin', 1, n)$
 $Y = 1/n * \text{grand}(1, 1, 'bin', X, p)$
- a) $Y_{[X=k]}(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket$ avec $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Avec le système complet d'événements tous de probabilité non nulle $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, par la formule des probabilités totales :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = 0)$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{[X=k]}(Y = 0) = \binom{k}{0} p^0 q^k = q^k \text{ et } P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } P(Y = 0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} q^k = \frac{q}{n} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- b) En procédant de même pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = i)$$

Lorsque $k < i$, $P_{[X=k]}(Y = i) = 0$ donc

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = i)$$

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

Ce qui correspond bien à une somme de $n - i + 1$ termes.

- a) Soit $1 \leq i \leq k \leq n$, $i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{i!(k-i)!} = i \frac{k(k-1)!}{i(i-1)!((k-1)-(i-1))!}$

$$\text{Donc } i \binom{k}{i} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!} = k \binom{k-1}{i-1}$$

- b) Y étant à support fini admet une espérance et on a $E(Y) = \sum_{i=1}^n iP(Y = i)$

$$\text{Donc } E(Y) = \sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right)$$

$$\text{D'où en utilisant 6a : } E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

Par inversion de la contrainte $1 \leq i \leq k \leq n$,

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

c) D'après la formule du binôme de Newton, avec le changement de variable $i' = i - 1$

$$\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = \sum_{i'=0}^{k-1} \binom{k-1}{i'} p^{i'+1} q^{k-1-i'} = p \sum_{i'=0}^{k-1} \binom{k-1}{i'} p^{i'} q^{k-1-i'} = p(p+q)^{k-1} = p$$

$$\text{Donc } E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)p}{2}$$

7. a) On suppose $n \geq 2$, Y étant à support fini, $Y(Y-1)$ admet une espérance et on a d'après le théorème de transfert :

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=2}^n i(i-1)P(Y=i) = \sum_{i=2}^n i(i-1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

En utilisant 6a successivement, on a $i(i-1) \binom{k}{i} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}$

$$\text{Ainsi } E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=i}^n k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

Et par inversion de la contrainte $2 \leq i \leq k \leq n$,

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n (k(k-1)) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}$$

b) D'après la formule du binôme de Newton et en utilisant le changement de variable $i' = i - 2$:

$$\sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = \sum_{i'=0}^{k-2} \binom{k-2}{i'} p^{i'+2} q^{k-2-i'} = p^2 \sum_{i'=0}^{k-2} \binom{k-2}{i'} p^{i'} q^{k-2-i'} = p^2 (p+q)^{k-2} = p^2$$

$$\text{D'où } E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{p^2}{n} \sum_{k=0}^n k(k-1) = \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \right)$$

$$E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{p^2}{2n} n(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right)$$

$$E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{2} (n+1) \frac{2n-2}{3} = \frac{p^2}{3} (n+1)(n-1) = \frac{p^2(n^2-1)}{3}$$

c) Si $n = 1$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ainsi $Y(Y-1) = 0$ et $E(Y(Y-1)) = 0$. En remplaçant n par 1 dans l'expression précédente, on trouve également 0 donc l'expression reste valable pour $n = 1$

d) Y étant à support fini admet une variance et par la formule de Koenig Huygens, on a

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

Par linéarité $E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y)$ donc $V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2$

Problème

1. Les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Elle y sont donc continues et les deux intégrales existent.

$$2. I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x}{(1+x)^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{Donc } I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = [\ln(1+x)]_0^1 - I_0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

3. a) Par linéarité, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n \frac{x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2} dx$

$$\text{D'où } I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 x^n \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

b) En posant $n = 0$ dans l'égalité précédente $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$ d'où $I_2 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$

c) a=b

$$b = 1/(k-1) - 2*a - aux$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in [0, 1]$ $(1+x)^2 \geq 1$ donc $\frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

$$\text{Et par croissance de l'intégrale } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \text{ d'où } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par théorème d'encadrement, la suite (I_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

$$\text{En posant } \begin{cases} u(x) = x^n & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{cases} \text{ les fonctions } u \text{ et } v \text{ étant } C^1 \text{ sur } [0, 1]$$

$$\text{L'intégration par parties est donc licite et } I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 n \frac{x^{n-1}}{(1+x)} dx = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}$$

6. a) En appliquant l'égalité précédente à $n = 1, I_1 = J_0 - \frac{1}{2}$ donc $J_0 = \ln 2$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ par linéarité, } J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

b) En appliquant l'égalité à $n = 0$, on obtient $J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln 2$

7. J=1/k-J

$$I = n*J - 1/2$$

8. Soit pour tout entier n la proposition $P_n : "J_n = (-1)^n (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})"$

$$\text{Initialisation : } J_1 = 1 - \ln 2 = (-1)^1 (\ln 2 - \frac{(-1)^{1-1}}{1}) \text{ donc } P_1 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : supposons que pour un entier naturel non nul n fixé, P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n = \frac{1}{n+1} - (-1)^n (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}) = \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})$$

Mais $1 = (-1)^{2n+2}$ donc $\frac{1}{n+1} = (-1)^{2n+2} \frac{1}{n+1} = -(-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Donc $J_{n+1} = (-1)^{n+1} (\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k})$ et P_{n+1} est vraie.

En conclusion on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})$

9. a) On a montré en 4 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et en 5 que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_{n-1} = \frac{1}{2}$$

Soit $J_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

b) En repartant de l'égalité démontrée à la question 8, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}) = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ existe et vaut $\ln 2$ donc la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

c) D'après le a de la question 9) on a $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)}$ donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

10. a) On sait que $J_n = (-1)^n u_n$ et $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$

b) D'après la question 9, on sait que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge donc en multipliant chaque terme par la constante $-\frac{1}{2}$ la série converge toujours (et son terme général est $\frac{(-1)^n}{2n}$ et sa somme vaut $\frac{-\ln 2}{2}$)

On a vu que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$ mais le théorème de comparaison n'est applicable qu'aux séries à termes positifs, on ne peut donc pas en déduire la nature de la série de terme général u_n , qui n'est par ailleurs pas absolument convergente (série harmonique DV)

11. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

$$\text{Donc } ku_k = (\ln 2)k - k \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$(k+1)u_{k+1} = (\ln 2)(k+1) - (k+1) \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$(k+1)u_{k+1} - ku_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} - (k+1) \frac{(-1)^{k+1-1}}{(k+1)} = u_k - (-1)^k$$

Donc $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme cette égalité pour k variant de 1 à n (somme finie) :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k$$

La deuxième somme est télescopique et vaut $(n+1)u_{n+1} - u_1$.

La troisième est la somme partielle d'une série géométrique de raison -1 et vaut $(-1) \frac{1 - (-1)^n}{2}$

Donc $S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$

$$c) S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 = (2n+1)u_{2n+1} - (\ln 2 - 1)$$

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - (\ln 2 - 1) - \frac{1}{2} = (2n+2)u_{2n+2} - \ln 2$$

$$\text{Or on sait que } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+2)u_{2n+2} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit ainsi que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - (\ln 2 - 1) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant convergentes et de même limite, on en déduit que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2} - \ln 2$. Ceci signifie que la série de terme général u_n converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2} - \ln 2$

$$12. \text{ On a montré que } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ donc que } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\text{On a vu en 9b) que } \ln 2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ (expression c)}$$

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EmLyon
BS

S U J E T

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0; 1[$ par :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)).$$

2. a. Justifier : $\forall t \in]0; 1[, t \ln(t) < 0$.

b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

3. a. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

PARTIE B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de \mathbb{N}^* , (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur \mathbb{R}^+ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur \mathbb{R}^+ que l'on note u_n .

7. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , u_n appartient à l'intervalle $]0; 1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2 .

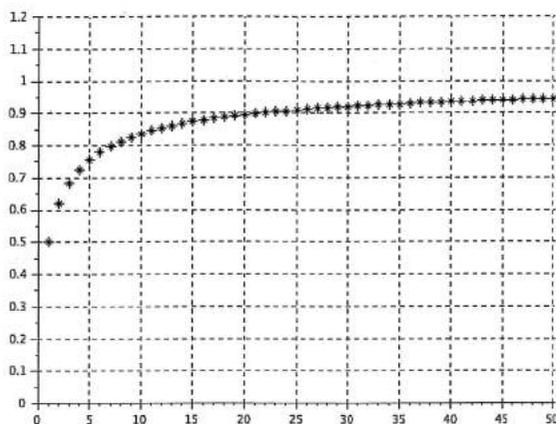
9. a. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de \mathbb{N}^* , elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1 fonction u = valeur_approchee(n)
2     a = 0
3     b = 1
4     while ...
5         c = (a+b)/2
6         if (c^n+c-1)>0 then
7             ...
8         else
9             ...
10        end
11        u = ...
12    end
13 endfunction

```

- b. On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a. Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $f(u_n) = n$.
 b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

PARTIE C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe C^2 sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2, F(x, y) = x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x.$$

11. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
 b. Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur \mathbb{R}^+ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.
12. a. Écrire la matrice hessienne, notée H , de la fonction F au point (u_3, u_3^2) .
 b. Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant :
 $\lambda_1 \lambda_2 = -6u_3^2 - 2$.
13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0; +\infty[^2$?

EXERCICE 2

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix},$$

et on note : $E = \{M(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.
 - b. Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?
2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0, 0)$ est diagonalisable.
3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.
 - a. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A .
 - b. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
 - c. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = P D P^{-1}$.
4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.
 - a. Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
 - b. En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.
 - c. La matrice B est-elle diagonalisable ?
5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est $M(a, b)$.
On pose : $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ et $T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$.
 - a. Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.
 - b. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
 - c. Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}' .
 - d. Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Montrer : X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0. \end{cases}$$
 - e. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T . En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

- f. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?
- g. Montrer l'équivalence :
 $M(a, b)$ est diagonalisable $\iff a^2 + 10ab + b^2 > 0$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté (Ω, \mathcal{A}, P) .

PARTIE A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. a. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .
- b. En déduire une fonction Scilab d'en-tête fonction $X = \text{pareto}(a, b)$ qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X .
- c. On considère la fonction Scilab ci-dessous.
Que contient la liste L renvoyée par la fonction `mystere` ?

```

1 fonction L = mystere(a,b)
2   L = []
3   for p = 2 : 6
4     S = 0
5     for k = 1 : 10^p
6       S = S + pareto(a,b)
7     end
8     L = [L, S/10^p]
9   end
10 endfunction

```

- d. On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b .
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```

1 --> mystere(2,1)
2 ans =
3   1.9306917  1.9411352  1.9840089  1.9977684  2.0012415
4
5 --> mystere(3,2)
6 ans =
7   3.1050951  3.0142956  2.9849407  2.9931656  2.9991517
8
9 --> mystere(1,4)
10 ans =
11  21.053151  249.58609  51.230522  137.64549  40.243918

```

4. a. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas,

$$E(X) = \frac{ab}{a-1}.$$

- b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas,

$$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

PARTIE B : Estimation du paramètre b

On suppose dans cette partie uniquement que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ 3b^3 & \text{si } x \geq b. \\ x^4 & \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

On définit : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

5. a. Calculer, pour tout x de $[b; +\infty[$, $\mathbf{P}([Y_n > x])$.
 b. En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
 c. Montrer que $Y'_n = \frac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b .
 Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
6. a. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
 b. En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme αZ_n où α est un réel à préciser.
 Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
7. Entre Y'_n et Z'_n , quel estimateur choisir ? Justifier.

PARTIE C : Estimation du paramètre a

On suppose dans cette partie uniquement que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
 Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
 En déduire l'espérance et la variance de W_n .
9. On définit, pour tout n de \mathbb{N}^* : $M_n = \frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}$ et $T_n = \sqrt{n}(a M_n - 1)$.
- a. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- b. En déduire que l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n} M_n}; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n} M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

On admettra que $\Phi(2) \geq 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

CORRIGÉ

Par Frédéric Brossard, professeur en CPGE à Intégrale, à Paris.

Exercice 1

PARTIE A

1. La fonction $x \mapsto 1 - x$ est polynomiale donc dérivable sur $]0, 1[$ et à valeurs dans $]0, 1[$.

La fonction $x \rightarrow \ln x$ est dérivable sur $]0, 1[$ (et ne s'annule pas sur cet intervalle).

Par composition de fonction dérivables, la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est également dérivable sur $]0, 1[$

f est ainsi dérivable en tant que fraction rationnelle de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{-1}{1-x} \ln x - \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{x(1-x)(\ln x)^2} (-x \ln x - (1-x) \ln(1-x))$$

2. a) Soit $t \in]0, 1[$ alors $t > 0$ et $\ln t \in]-\infty, 0[$ donc $t \ln t < 0$

b) D'après la question précédente,

$$\forall t \in]0, 1[, t \ln t < 0 \text{ et on a aussi } (1-t) \ln(1-t) < 0 \text{ car } 1-t \in]0, 1[\text{ donc } -t \ln t - (1-t) \ln(1-t) > 0$$

D'autre part $t(1-t)(\ln t)^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0, 1[$

3. a) f est continue sur $]0, 1[$ car dérivable.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} 1 - t = 1 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1 - t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$$

Ainsi f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

- b) On considère le taux d'accroissement de f en 0 soit $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x)}{x \ln x}$

$$\text{On sait que } \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x$$

$$\text{D'où } \frac{\ln(1-x)}{x \ln x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0$$

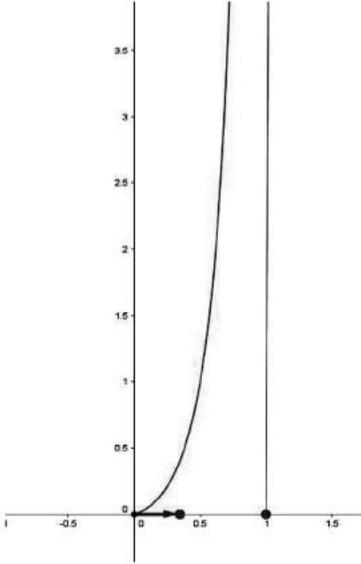
4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

La courbe de f présente une asymptote verticale d'équation $x = 1$

5. Courbe de f :



PARTIE B

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n + x - 1 \end{cases}$

Cette fonction est polynomiale donc dérivable et a fortiori continue sur \mathbb{R}^+

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) > 0$ ainsi f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans $[f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[$ soit $[-1, +\infty[$

f_n continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}^+ dans $[-1, +\infty[$ or $0 \in [-1, +\infty[$ donc il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$

7. $f_n(1) = 1, f_n(0) = -1, f_n(u_n) = 0$ donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$ et par stricte croissance de f_n on a ainsi $0 < u_n < 1$

$$8. f_1(u_1) = 0 \iff u_1 + u_1 - 1 = 0 \iff u_1 = \frac{1}{2}$$

$$f_2(u_2) = 0 \iff \begin{cases} u_2^2 + u_2 - 1 = 0 \\ u_2 \in]0, 1[\end{cases}$$

Equation du second degré : $\Delta = 5$, deux racines réelles $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ négative et $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ positive qui est la valeur cherchée.

9. a) 1e ligne à compléter : `while abs(a-b)>10^(-3)`

2e ligne à compléter : `b=c`

3e ligne à compléter : `a=c`

4e ligne à compléter : `u=c`

- b) Le graphe permet de conjecturer que la suite est croissante et qu'elle semble converger vers une limite comprise entre 0.9 et 1

10. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$ et $f(u_n) = \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln u_n}$

Mais $u_n^n = 1 - u_n$ donc $\ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n \ln u_n$

D'où $f(u_n) = n$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n \in]0, 1[$, $u_{n+1} \in]0, 1[$

$f(u_{n+1}) = n + 1$, $f(u_n) = n$ donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ et par stricte croissance de f sur $]0, 1[$, $u_{n+1} > u_n$

La suite est strictement croissante.

- c) La suite est donc strictement croissante. Comme elle est majorée par 1 alors d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite $l \in [0, 1]$

Supposons que $l < 1$ alors par croissance de la suite, on aurait $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq l$ donc $0 \leq u_n^n \leq l^n$

Ainsi par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^n + u_n - 1 = 0$ et en passant à la limite dans cette expression on aurait donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $l \neq 1$.

Donc nécessairement $l = 1$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

PARTIE C

11. a) F étant C^2 sur l'ouvert, elle admet des dérivées partielles d'ordre 1.

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 \quad \partial_1 F(x, y) = 2xy + 2x - 2 \quad \partial_2 F(x, y) = x^2 - y$$

- b) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ un éventuel point critique alors : $(S) : \begin{cases} (x, y) \in]0, +\infty[^2 \\ 2xy + 2x - 2 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} (x, y) \in]0, +\infty[^2 \\ y = x^2 \\ 2x^3 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in]0, +\infty[^2 \\ y = x^2 \\ x^3 + x - 2 = 0 = f_3(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x = u_3 \\ y = u_3^2 \end{cases}$$

12. a) F étant C^2 admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point (x, y) de l'ouvert et :

$$\partial_{11}^2 F(x, y) = 2y + 2 \quad \partial_{12}^2 F(x, y) = 2x$$

$$\partial_{21}^2 F(x, y) = 2x \quad \partial_{22}^2 F(x, y) = -1$$

Au point (u_3, u_3^2) on a ainsi $H = \begin{pmatrix} 2u_3^2 + 2 & 2u_3 \\ 2u_3 & -1 \end{pmatrix}$

- b) On cherche les valeurs propres de H (qui existent puisqu'elle est symétrique réelle). Soit λ une valeur propre alors $\det(H - \lambda I_2) = 0$

D'où $(2u_3^2 + 2 - \lambda)(-1 - \lambda) - (2u_3)^2 = 0$ soit $\lambda^2 - \lambda(2u_3^2 + 1) - (6u_3^2 + 2) = 0$

$\Delta = (2u_3^2 + 1)^2 + 4(6u_3^2 + 2) > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dont le produit vaut $-6u_3^2 - 2 < 0$, les deux racines sont donc de signes opposés.

13. F n'admet qu'un seul point critique et les valeurs propres de la matrice hessienne associée sont de signes opposés, donc F ne présente pas d'extremum local sur $]0, +\infty[^2$.

Exercice 2

$$1. \text{ a) } E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \middle/ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Donc $E = \text{Vect}(M(1,0), M(0,1))$ avec $M(1,0) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $M(0,1) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non nulles et non colinéaires. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 2.

b) On effectue le produit de deux matrices $M(a,b)$ et $M(c,d)$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$:

$$M(a,b)M(c,d) = \begin{pmatrix} a(c+d) & ad & * & * \\ a(c+d) & ad & * & * \\ a(c+d) & ad & * & * \\ b(3c+d) & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, avec ad non nécessairement nul, on constate que le produit de deux matrices quelconques de E n'appartient pas à E

2. $M(0,0)$ est la matrice nulle qui est diagonale donc diagonalisable.

$$3. \text{ a) } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aA$$

Le polynôme $X^2 - aX$ est donc annulateur pour A

b) Les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme annulateur donc $\text{Sp}(A) \subset \{0, a\}$

$$\text{- Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tel que } AX = 0 \text{ (S)}$$

$$(S) \iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + t = 0 \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \text{Ker}A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\text{Ker}A$. Les 3 vecteurs forment de manière évidente une famille libre donc la dimension de $\text{Ker}A$ est 3.

$$\text{- Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tel que } AX = aX \text{ (S)}$$

$$(S) \iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où $\text{Ker}(A - aI) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ce vecteur étant non nul, il forme une base de $\text{Ker}(A - aI)$ donc a est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est 1

- c) La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 4 donc A est diagonalisable.

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A = PDP^{-1}$$

4. a) $B = M(0, b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$. Les 4 colonnes sont identiques et non nulles donc $\text{rg}(B) = 1$

$B - bI_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$. La dernière colonne est nulle et les 3 autres sont échelonnées donc libres. Ainsi $\text{rg}(B - bI_4) = 3$

- b) La formule du rang nous permet d'écrire que $\dim \text{Ker} B = 4 - \text{rg}(B) = 3$ donc 0 est valeur propre de B et la dimension du sous-espace propre associé est 3

De même, $\dim \text{Ker}(B - bI_4) = 4 - \text{rg}(B - bI_4) = 1$ donc b est valeur propre de B et la dimension du sous-espace propre associé est 1

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B étant inférieure à 4 et $\dim \text{Ker} B + \dim \text{Ker}(B - bI_4) = 4$ donc les seules valeurs propres de B sont 0 et b

- c) $\dim \text{Ker} B + \dim \text{Ker}(B - bI_4) = 4$ donc B est diagonalisable.

5. a) La première et la dernière colonne de $M(a, b)$ sont identiques et non nulles, il en va de même pour la 2e et la 3e colonne donc $\text{rg}(M(a, b)) \leq 2$. Les colonnes 1 et 2 sont trivialement libres donc $\text{rg}(M(a, b)) = 2$ ainsi $\text{rg}(f) = 2$.

Si (e_1, e_2, e_3, e_4) sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 , on a $f(e_1 - e_4) = 0$ et $f(e_2 - e_3) = 0$ (égalité des colonnes 1 et 4 et des colonnes 2 et 3 de $M(a, b)$)

Ces vecteurs étant libres puisque non colinéaires, une base de $\text{Ker} f$ est $(v_3 = (1, 0, 0, -1), v_4 = (0, 1, -1, 0))$

- b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant les lignes 2 et 4 on en déduit que $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_4 = 0$ et en réinjectant dans la ligne 1, $\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$

La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre. Comme elle comporte 4 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, c'est une base.

$$c) f(v_3) = f(v_4) = 0$$

Calculons les coordonnées de $f(v_1)$ dans la base canonique en posant V_1 le vecteur colonne des coordonnées de v_1 .

$$M(a, b)V_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{pmatrix} \text{ donc } f(v_1) = av_1 + 3bv_2$$

$$\text{De même } M(a, b)V_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ donc } f(v_2) = av_1 + bv_2$$

$$\text{Ainsi la matrice de } f \text{ dans la base } (v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ est } N = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Supposons que X soit un vecteur propre associé à la valeur propre λ , c'est équivalent à écrire que :

$$NX = \lambda X \text{ soit } \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ 3bx + by = \lambda y \\ 0 = \lambda z \\ 0 = \lambda t \end{cases} \text{ et } X \text{ admet au moins une coordonnée non nulle.}$$

$$\text{On sait que } \lambda \neq 0 : \text{ le système précédent est équivalent à } \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ 3bx + by = \lambda y \\ z = t = 0 \\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de } T \text{ associé à } \lambda \\ z = t = 0 \end{cases}$$

e) λ est valeur propre de T si et seulement si $\det(T - \lambda I_2) = 0$ soit $(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 3 = 0$ soit $(1 - \sqrt{3} - \lambda)(1 + \sqrt{3} - \lambda) = 0$. Les valeurs propres de T sont donc $1 - \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} + 1$

T admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et différentes de 0. Elles sont donc également valeurs propres de N d'après la question précédente donc de f et on a $\dim(\ker(f - \lambda_1 id)) \geq 1$ et $\dim(\ker(f - \lambda_2 id)) \geq 1$. 0 est également valeur propre de N (donc de f) puisque $\dim(\ker f) = 2$ ((v_3, v_4) formant une base de $\text{Ker } f$)

On sait que $\dim(\ker(f - \lambda_1 id)) + \dim(\ker(f - \lambda_2 id)) + \dim(\ker f) \leq 4$ donc nécessairement $\dim(\ker(f - \lambda_1 id)) = 1$, $\dim(\ker(f - \lambda_2 id)) = 1$ et $\dim(\ker f) = 2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 4 donc f est diagonalisable et $M(1, 1)$ étant la matrice de f dans la base canonique est diagonalisable.

f) λ est valeur propre de T si et seulement si $\det(T - \lambda I_2) = 0$ soit $(1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 3 = 0$ soit $\lambda^2 + 2 = 0$. Cette équation n'admet pas de solution. T n'a pas de valeurs propres donc N n'admet que 0 comme valeur propre et $\dim(\ker f) = 2 \neq 4$ donc f non diagonalisable et comme $M(1, -1)$ est la matrice de f dans la base canonique, elle n'est pas diagonalisable.

g) $M(a, b)$ diagonalisable $\iff T$ admet deux valeurs propres distinctes et non nulles (0 est déjà valeur propre de $M(a, b)$ et son sous-espace associé est de dimension 2) ou si T admet une seule valeur propre double dont la dimension du sous-espace propre associé est 2.

Ce 2e cas est impossible, sinon T serait égale à λI_4 or $b \neq 0$ et T ne peut être égale à λI_4

D'où $M(a, b)$ diagonalisable $\iff T$ admet deux valeurs propres distinctes et non nulles.

$$\lambda \text{ est valeur propre de } T \text{ si et seulement si } \det(T - \lambda I_2) = 0 \iff (a - \lambda)(b - \lambda) - 3ab = 0 \iff \lambda^2 - (a + b)\lambda - 2ab = 0$$

Cette équation admet deux racines distinctes si et seulement si son discriminant $\Delta = (a+b)^2 + 8ab$ est strictement positif soit $a^2 + 10ab + b^2 > 0$

D'où $M(a, b)$ diagonalisable $\iff a^2 + 10ab + b^2 > 0$

Exercice 3

PARTIE A

1. La fonction f est définie et positive sur \mathbb{R} . La fonction f est continue sur $] -\infty, b[$ en tant que fonction constante et sur $]b, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc f continue sur \mathbb{R} sauf en b .

Comme f est nulle sur $] -\infty, b[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\text{Soit } A > b, \int_b^A f(t)dt = \left[\frac{-ab^a}{ax^a} \right]_b^A = \frac{b^a}{b^a} - \frac{b^a}{A^a} = 1 - \frac{b^a}{A^a}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - \frac{b^a}{A^a} = 0$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_b^A f(t)dt = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 et f est bien une densité de probabilité.

2. Notons F_X la fonction de répartition de X . $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Si $x < b$, $F_X(x) = 0$ car f nulle sur $] -\infty, x]$

$$\text{Si } x \geq b \quad F_X(x) = \int_b^x f(t)dt = 1 - \frac{b^a}{x^a} \quad (\text{calcul déjà effectué à la question 1})$$

$$\text{D'où } F_X(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

3. a) Notons G la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = bU^{\frac{1}{a}}$ et F_U la fonction de répartition de U

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \text{ car } U(\Omega) =]0, 1[$$

$$\text{Si } x \leq 0, G(x) = 0$$

$$\text{Si } x > 0, G(x) = P(Y \leq x) = P(bU^{\frac{1}{a}} \leq x) = P(U^{\frac{1}{a}} \leq \frac{x}{b})$$

$$\text{La fonction } t \rightarrow t^a \text{ étant croissante et bijective sur } \mathbb{R}^+, G(x) = P(U^{-1} \leq \left(\frac{x}{b}\right)^a)$$

$$\text{Et par décroissance de la fonction inverse : } G(x) = P(U \geq \left(\frac{b}{x}\right)^a) = 1 - F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right)$$

$$\text{Si } 0 < x < b, \left(\frac{b}{x}\right)^a > 1 \text{ donc } F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) = 1 \text{ et } G(x) = 0$$

$$\text{Si } x \geq b, 0 < \left(\frac{b}{x}\right)^a \leq 1 \text{ donc } F_U\left(\left(\frac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\frac{b}{x}\right)^a \text{ et } G(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$$

$$\text{Donc } G(x) = \begin{cases} 0 = F_X(x) & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a = F_X(x) & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

On constate que Y et X ont même fonction de répartition donc Y suit une loi de Pareto de paramètres a et b

b) `function X=pareto(a,b)`
`X=b*rand()^(-1/a)`
`endfunction`

c) La liste L contient 5 valeurs de la moyenne empirique d'un échantillon de la loi de Pareto de paramètres a et b de taille 10^p pour p prenant les valeurs successives 2, 3, 4, 5, 6. La moyenne empirique étant un estimateur sans biais de l'espérance de la loi, on peut considérer que la fonction renvoie, si l'espérance existe, 5 valeurs approchées de l'espérance.

d) Pour les couples (2, 1) et (3, 2) les moyennes empiriques obtenues sont relativement proches quelle que soit la valeur de p . On peut donc conjecturer que X admet une espérance pour ces 2 couples et que celle-ci vaut respectivement à peu près 2 et à peu près 3

Pour le couple (1, 4) les moyennes empiriques obtenues sont disparates. On peut donc conjecturer que X n'admet pas d'espérance.

4. a) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente. Comme f est nulle sur $]-\infty, b[$ et positive sur $[b, +\infty[$ alors f admet une espérance si et seulement si $\int_b^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

$$\underline{\text{Ie cas } a \neq 1} : \text{ soit } A > b, \int_b^A tf(t)dt = \int_b^A a \frac{b^a}{t^a} dt = ab^a \left[\frac{1}{(1-a)x^{a-1}} \right]_b^A = \frac{ab}{a-1} - \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}}$$

Si $a-1 < 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} = -\infty$ et X n'admet pas d'espérance.

Si $a-1 > 0$ donc si $a > 1$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} = 0$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{ab}{a-1} - \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} = \frac{ab}{a-1}$ ainsi X admet une espérance qui vaut $\frac{ab}{a-1}$

2e cas si $a = 1$: soit $A > b$, $\int_b^A tf(t)dt = \int_b^A a \frac{b^a}{t} dt = ab^a(\ln A - \ln b)$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty$ donc X n'admet pas d'espérance.

Conclusion : X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et dans ce cas, $E(X) = \frac{ab}{a-1}$

b) X admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ est convergente. Comme f est nulle sur $]-\infty, b[$ et positive sur $[b, +\infty[$ alors f admet une espérance si et seulement si $\int_b^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.

$$\underline{\text{Ie cas } a \neq 2} : \text{ soit } A > b, \int_b^A t^2 f(t)dt = \int_b^A a \frac{b^a}{t^{a-1}} dt = ab^a \left[\frac{1}{(2-a)x^{a-2}} \right]_b^A = \frac{ab^2}{a-2} - \frac{ab^2}{(a-2)A^{a-2}}$$

Par un raisonnement analogue à celui de la question 4)a) on montre que cette expression admet une limite finie si et seulement si $a > 2$ et dans ce cas, X admet un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{ab^2}{a-2}$ donc X admet une variance.

Par la formule de Koenig Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2$

$$V(X) = ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2} \right) = ab^2 \frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

2e cas $a = 2$: soit $A > b$, $\int_b^A t^2 f(t)dt = \int_b^A a \frac{b^a}{t} dt = ab^a(\ln A - \ln b)$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} ab^a(\ln A - \ln b) = +\infty$ donc X n'admet pas de moment d'ordre 2 donc n'admet pas de variance.

PARTIE B

5. a) Soit $x > b$, $P(Y_n > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = P(\bigcap_1^n (X_i > x))$

Les X_i étant indépendantes et de même loi que X , on a ainsi

$$P(Y_n > x) = P(X > x)^n = (1 - F_X(x))^n = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$$

b) L'expression $P(Y_n > x) = P(X > x)^n = (1 - F_X(x))^n$ demeure valable si $x < b$

Ainsi si $x < b$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - 1 = 0$

Si $x \geq b$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}$

On retrouve l'expression de la fonction de répartition d'une loi de Pareto de paramètres $3n$ et b

c) Comme $a = 3$, Y_n admet une espérance égale à $\frac{3nb}{3n-1}$ et par linéarité, Y'_n admet une espérance égale à $\frac{3n-1}{3n}E(Y_n) = b$

Comme Y'_n est une fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendante du paramètre à estimer, c'est un estimateur de b et il est sans biais puisque $E(Y'_n) = b$

Etant sans biais, son risque quadratique est égale à sa variance donc

$$r(Y'_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 V(Y_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}$$

6. a) Z_n admet une espérance en tant que fonction affine d'une somme finie de variables admettant une espérance et par linéarité $E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X) = \frac{3b}{2}$

De même $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$ par indépendance des X_i d'où $V(Z_n) = \frac{3b^2}{4n}$

b) On pose $Z'_n = \frac{2}{3}Z_n$. C'est bien un estimateur de b puisque fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendante du paramètre à estimer et par linéarité $E(Z'_n) = b$. Par propriété de la variance $V(Z'_n) = \frac{b^2}{3n}$. C'est également la valeur du risque quadratique puisque l'estimateur est sans biais.

7. Le risque quadratique de Y'_n est équivalent à $\frac{b^2}{9n^2}$ en $+\infty$ tandis que celui de Z'_n est égal à $\frac{b^2}{3n}$.

Ces deux risques quadratiques tendent vers 0 en $+\infty$ donc les 2 estimateurs, sans biais tous les deux, sont convergents.

Le premier converge plus vite (il est en $\frac{1}{n^2}$) que le second (qui est en $\frac{1}{n}$). Y'_n est donc le choix à privilégier.

PARTIE C

8. $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $W_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$

Soit F_{W_n} la fonction de répartition de W_n

Si $x < 0$, $F_{W_n}(x) = 0$

Si $x \geq 0$, $F_{W_n}(x) = P(\ln(X_n) \leq x) = P(X_n \leq e^x)$ par croissance et bijectivité de la fonction exponentielle sur \mathbb{R}^+

D'où $F_{W_n}(x) = 1 - (\frac{1}{e^x})^a = 1 - e^{-ax}$

D'où $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a

D'où $E(W_n) = \frac{1}{a}$ et $V(W_n) = \frac{1}{a^2}$

9. a) Les variables $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ étant indépendantes, les variables $(\ln(X_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ le sont également. Elles admettent une même espérance $\frac{1}{a}$ et une même variance $\frac{1}{a^2}$.

D'après le théorème de la limite centrée, la variable aléatoire $\sqrt{n}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{a})$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

$$\text{Or } \sqrt{n}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{1}{a}) = \sqrt{n}a(M_n - \frac{1}{a}) = T_n$$

Donc la suite de variables aléatoires (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

- b) Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n| \leq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(-\varepsilon \leq T_n \leq \varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n}|aM_n - 1| \leq \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$

On cherche ε tel que $2\Phi(\varepsilon) - 1 = 0.95$ soit $\Phi(\varepsilon) = 0.975$ On prend donc $\varepsilon = 2$

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n}|aM_n - 1| \leq 2) \geq 0.95$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{-2}{\sqrt{n}} \leq aM_n - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{n}}) \geq 0.95$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{M_n} \leq a \leq \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{M_n}) \geq 0.95$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}M_n} \leq a \leq \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}M_n}) \geq 0.95$

Donc $[\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n}M_n}, \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}M_n}]$ est bien l'intervalle de confiance recherché.

ÉCONOMIE

DURÉE : 2 HEURES 30.

Les deux sujets de l'épreuve « Économie » et « Droit » seront traités sur la même copie.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

Aucun document n'est autorisé, l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

ÉCONOMIE (50 % de la note globale)

SUJET

PREMIÈRE PARTIE : NOTE DE SYNTHÈSE

À partir du dossier documentaire suivant, vous ferez une note de synthèse de 500 mots environ (à plus ou moins 10 %) sur **la situation économique actuelle en présence de taux d'intérêt négatifs.**

Composition du dossier documentaire :

Document 1 : Comment expliquer les taux d'intérêt négatifs ? *La finance pour tous*, 18 juillet 2019

Document 2 : Faut-il s'inquiéter d'un monde de taux négatifs ? Delphine Cuny, *La Tribune Hebdomadaire*, 12 septembre 2019

Document 3 : Rencontres d'Aix : les taux négatifs déroutent les économistes, AGEFI, 7 juillet 2019

Document 4 : Taux d'intérêt : « La BCE risque de nous mener des paradis artificiels à un enfer bien réel », Marc Touati, *Capital*, 13 septembre 2019

Document 5 : Évolution des taux d'intérêt par rapport à l'inflation, BDF-BCE, Avril 2019

D O S S I E R D O C U M E N T A I R E

Document 1 : Comment expliquer les taux d'intérêt négatifs ?

Depuis quelques années, certains grands pays de la zone euro comme l'Allemagne ou la France peuvent emprunter sur les marchés financiers à des taux d'intérêt négatifs. Il s'agit d'un phénomène inédit et qui tend à se développer.

Des politiques monétaires expansionnistes pour faire baisser les taux d'intérêt

Après le déclenchement de la crise financière de 2008, la banque centrale américaine (la FED) a opté pour la mise en œuvre d'une politique monétaire non conventionnelle consistant à acheter des titres de dette publique sur le marché obligataire (appelée *Quantitative Easing*, ou QE), dans le but de faire baisser les taux d'intérêt à moyen et long terme, de générer des gains en capital pour les investisseurs boursiers et ainsi favoriser la relance de l'économie américaine.

Au total, la FED conduira trois programmes successifs d'assouplissement quantitatif par le biais desquels elle aura injecté près de 3 500 milliards de dollars sur les marchés financiers entre 2009 et 2014 (le programme a pris fin en octobre 2014). La Banque d'Angleterre, la Banque du Japon, puis la BCE (à partir de mars 2015) se lanceront également dans des politiques d'assouplissement quantitatif. Dans le cas européen, le plan d'assouplissement quantitatif de la BCE correspond à une enveloppe totale de 1 700 milliards d'euros. Parallèlement, toutes les banques centrales des grands pays développés ont procédé à des baisses de leur taux d'intérêt principal, par lequel elles refinancent les banques commerciales.

Les conséquences de ces politiques monétaires très expansionnistes au niveau mondial furent :

- de déverser des masses considérables de liquidités sur les marchés financiers : les investisseurs qui recevaient ces liquidités en échange des titres vendus aux banques centrales ont alors cherché à les réinvestir ; une partie a été « recyclée » dans l'économie réelle pour financer des projets privés (des particuliers ou des entreprises), notamment aux États-Unis, mais l'essentiel est resté sur les marchés financiers obligataires et actions, provoquant des hausses parfois spectaculaires des bourses ;
- de provoquer des baisses très importantes des taux d'intérêt à court, moyen et long terme : c'est ce que l'on dénomme parfois « l'aplatissement de la courbe des taux » pour signifier que les taux d'intérêt de toutes les échéances, de la plus courte à la plus longue, ont été orientés à la baisse de façon concomitante. Sur les marchés obligataires, les achats d'actifs opérés par les banques centrales ont en effet provoqué un déséquilibre entre l'offre et la demande pour les titres souverains qui s'est traduit par une baisse sensible des taux.

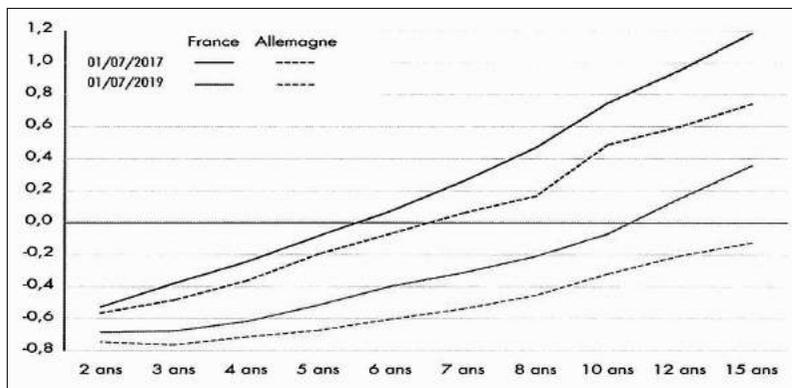
Que signifie un taux négatif ?

Dans une situation normale, un détenteur d'obligation perçoit un intérêt annuel pendant toute la durée de vie de l'obligation. À l'échéance de celle-ci, il est également remboursé du montant du nominal, c'est-à-dire de la valeur faciale de l'obligation.

Une obligation émise à 100 euros au taux de 2 % par an sur 5 ans produira 2 euros d'intérêts annuels, soit au total 10 euros sur la durée de vie de l'obligation. Au terme de celle-ci, le détenteur de l'obligation recevra en outre les 100 euros.

En cas de taux d'intérêt négatif, l'obligation émise donne également droit à la perception d'intérêt sur toute sa durée de vie. Toutefois, son détenteur ne l'a pas achetée à sa valeur faciale, mais plus. Par exemple il l'achète 111 euros alors que sa valeur faciale est de 100 euros. À l'échéance de l'obligation, il recevra ces 100 euros. Avec un taux d'intérêt de 2 % par an sur 5 ans, il aura perçu des coupons pour un total de 10 euros (2 euros par an sur 5 ans). Au final, il récupère 100 euros après avoir encaissé 10 euros d'intérêts, soit 110 euros sur la période alors qu'il a acheté le titre 111 euros. Son rendement est donc négatif de 0,9 % (1 euro perdu sur 111 investis). Comme le paiement du coupon est fixe et connu lors de l'émission, l'investisseur sait que son rendement sera négatif dès qu'il achète le titre et prend donc sa décision en connaissance de cause.

Courbes des taux des obligations



Source : *La finance pour tous*, 18 juillet 2019.

Document 2 : Faut-il s'inquiéter d'un monde de taux négatifs ?

Qui sont les gagnants de ces taux ?

Les États en premier lieu : ils peuvent ainsi réduire leur dette publique (comme l'Allemagne) ou se refinancer à des conditions très avantageuses. Selon la Cour des comptes, la baisse des taux d'intérêt devrait générer 400 millions d'euros d'économies sur le coût de financement de l'État français cette année et « jusqu'à 4 milliards pour l'année 2020 ». Les entreprises aussi, notamment les plus solides, peuvent diminuer le coût de leur dette et investir. Les ménages également, s'ils sont emprunteurs. Indirectement, les banques centrales, puisqu'elles ont réalisé des plus-values sur les dettes rachetées dans le cadre du QE ; elles ont dégagé des bénéfices qui sont reversés aux États.

Qui sont les perdants ?

Les épargnants, qui ont misé sur les produits de taux, les préférés des Français notamment (65 % de leurs placements, en assurance vie en euros ou en dépôts bancaires selon la Banque de France). « Avec les taux zéro,

inférieurs à l'inflation, les petits épargnants ont vu un tiers de leur capital partir en fumée en dix ans » s'est emporté un eurodéputé néerlandais, Derk Jan Eppink, lors de l'audition de Christine Lagarde, se demandant si la future présidente de la BCE ne serait pas « la mauvaise fée du citoyen. Vous punissez les épargnants, vous récompensez les endettés. » Cependant, les épargnants sont aussi généralement emprunteurs et/ou propriétaires de leur logement : l'impact global est difficile à mesurer pour les ménages. Pour trouver du rendement, les épargnants doivent se tourner vers des placements plus risqués comme les actions (le CAC 40 a gagné 18 % depuis janvier), les métaux précieux (le cours de l'or a progressé de 17 % depuis janvier, celui de l'argent aussi), voire le bitcoin (qui a triplé de 3 700 dollars à 10 700 dollars. après avoir perdu plus de 70 % de sa valeur l'an dernier), l'investissement dans le non-coté, le *crowdfunding* (prêt participatif aux PME), etc. Pourtant, sans doute inquiets pour l'avenir et peu portés sur la prise de risques, les Français laissent dormir 585 milliards d'euros sur leurs comptes courants, un record depuis 2009.

La rentabilité des banques est fragilisée : elles gagnent de l'argent sur la différence entre les intérêts qu'elles perçoivent sur les crédits qu'elles accordent et les intérêts qu'elles versent sur les livrets d'épargne de leurs clients ainsi que leurs propres dettes. Même si elles se refinancent à taux zéro, l'équation se complique quand les taux des prêts se rapprochent de zéro. Les assureurs sont aussi coincés entre le faible rendement de leurs placements et les engagements de rémunération pris dans les contrats d'assurance vie.

Comment survivent les banques ?

Les banques compensent en partie la perte de marge nette d'intérêts grâce au volume (en octroyant beaucoup de crédits) et à l'activité d'assurance (emprunteur, habitation, auto, vie) ainsi que les services financiers à l'international (crédit conso, location longue durée, etc). Cependant, la rentabilité des banques européennes se détériore, même si elles dégagent encore d'importants bénéfices. Elles se restructurent, diminuent le nombre d'agences et les effectifs. La BCE envisage des mesures compensatrices : comme le font les banques centrales en Suède, au Japon, en Suisse, elle pourrait exempter une partie des dépôts du taux de rémunération négatif. Aucune banque française n'applique de taux négatif sur les dépôts des particuliers et des PME : trop risqué sur le plan commercial. Certaines banques, en Suisse, en Allemagne, au Danemark, ont commencé à le faire sur des dépôts dépassant 100.000 euros ou 1 à 2 millions, pour les clients de banque privée.

Y a-t-il un risque de surendettement ?

Le Haut conseil de stabilité financière, présidé par le ministre de l'Économie et des Finances, s'inquiète depuis plusieurs mois de la croissance du crédit en France (supérieure à 6 % sur un an), plus forte qu'ailleurs en zone euro. L'endettement du secteur privé non financier (ménages et entreprises), a atteint 132,3 % du PIB français au quatrième trimestre 2018, en hausse de plus de 4 points sur un an, contre 118,9 % en moyenne dans la zone euro, 92,2 % en Allemagne et 106,2 % en Italie (155,5 % au Royaume-Uni).

Source : Delphine Cuny, *La Tribune Hebdomadaire*, 12 septembre 2019.

Document 3 : Rencontres d'Aix : les taux négatifs déroutent les économistes

Des avantages, des inconvénients et « beaucoup de questions » : aux rencontres d'Aix-en-Provence, la faiblesse des taux d'intérêt, tirés vers le bas par la politique expansionniste des banques centrales, divise les économistes, décontenancés par un phénomène jugé « inespéré » ou « délirant ».

« Combien de temps ça va durer ? Jusqu'où cela va aller ? Tout le monde se pose des questions », résume Ludovic Subran, chef économiste d'Allianz, qui voit dans les taux négatifs le symptôme d'une économie arrivée à un « moment charnière ». « C'est très déstabilisant », insiste-t-il. Après une première incursion en territoire négatif en 2016, le taux d'emprunt à 10 ans de l'Allemagne, qui fait référence en Europe, a plongé en mars et ne cesse depuis lors de s'enfoncer. Mi-juin, il a été rejoint par celui de la France, tombé à un plus bas historique.

Ce phénomène, apparemment irrationnel, signifie qu'un investisseur se verra rembourser un peu moins qu'il n'a prêté s'il garde son titre jusqu'à échéance : pour lui, l'objectif est de bénéficier d'un placement sûr, quitte à payer légèrement pour cela, comme lors de la location d'un coffre-fort.

Une aubaine pour les États

Faut-il s'en inquiéter ou faut-il s'en réjouir ? Pour les États concernés, la faiblesse des taux a tout d'une aubaine : c'est « une source d'espoir » parce que cela réduit « la charge de la dette », le coût des emprunts étant quasiment nul pour les finances publiques, souligne Philippe Aghion, professeur au Collège de France.

Selon la Cour des comptes, la France devrait économiser l'an prochain quatre milliards d'euros sur la charge de la dette par rapport à ses prévisions initiales. Une manne inespérée, alors que Bercy peine à financer les baisses d'impôts annoncées à l'issue du « grand débat ».

Doit-on aller plus loin en profitant des faibles taux pour financer des réformes de long terme ?

C'est ce que souhaitent plusieurs économistes, à l'image de Jean Pisani-Ferry, qui appelle à emprunter massivement pour la transition écologique. Cette position « se justifie », soutient Philippe Aghion. « Si on ne fait pas la transition énergétique maintenant, ça va coûter beaucoup plus cher demain. Donc il y a une bonne raison de s'endetter maintenant ».

Pour Agnès Benassy-Queré, de l'École d'économie de Paris, les faibles taux peuvent être « une opportunité pour investir », mais « pas dans n'importe quoi ». « Il faut que ce soit sur de l'investissement public, pas des dépenses courantes », estime-t-elle.

« Une espère de drogue »

Interrogé samedi sur ce sujet, le ministre de l'Économie et des Finances Bruno Le Maire s'est montré prudent, en estimant que si « des dépenses supplémentaires » devaient être envisagées, elles devaient l'être « au niveau européen ».

Les « taux d'intérêt négatifs ne doivent pas devenir une espèce de drogue qui nous empêche de voir certaines réalités économiques », a ajouté le ministre, insistant sur les « inconvénients » induits par ces faibles taux.

Au-delà du risque de dérapage des finances publiques dans les pays déjà lourdement endettés, c'est l'impact des faibles taux sur le secteur financier et ses possibles répercussions macroéconomiques qui suscitent l'inquiétude. « Les taux zéro, c'est une bonne chose pour l'investissement de long terme. Mais ça n'est pas sans conséquences », rappelle Patrick Artus, économiste chez Natixis, qui appelle à regarder « la colonne des plus et la colonne des moins ». Dans cette dernière colonne : l'impact sur la santé des banques, dont la rentabilité baisse ; l'envol des prix de l'immobilier, avec le risque de formation d'une bulle ; et le maintien en vie d'entreprises « zombies », « inefficaces » mais « qui survivent artificiellement ».

« Les taux zéro, ce n'est pas sans inconvénients. On ne peut pas dire que l'on met les taux à zéro jusqu'à la fin des temps et tout est réglé : c'est délirant », s'agace M. Artus, qui appelle les banques centrales à prendre davantage en compte ces « effets négatifs ».

« Le problème, c'est que l'inflation est très faible, notamment en Europe. D'un point de vue macroéconomique, la position des banques centrales n'est pas facile », juge Agnès Benassy Queré, pour qui l'atonie des prix soulève « beaucoup de questions ».

« Les taux sont trop bas pour être honnêtes », conclut Ludovic Subran, qui voit dans cette situation le « symptôme d'une très forte aversion au risque » de la part des épargnants et des investisseurs : « quelque part, c'est inquiétant ».

Source : AGEFI, 7 juillet 2019

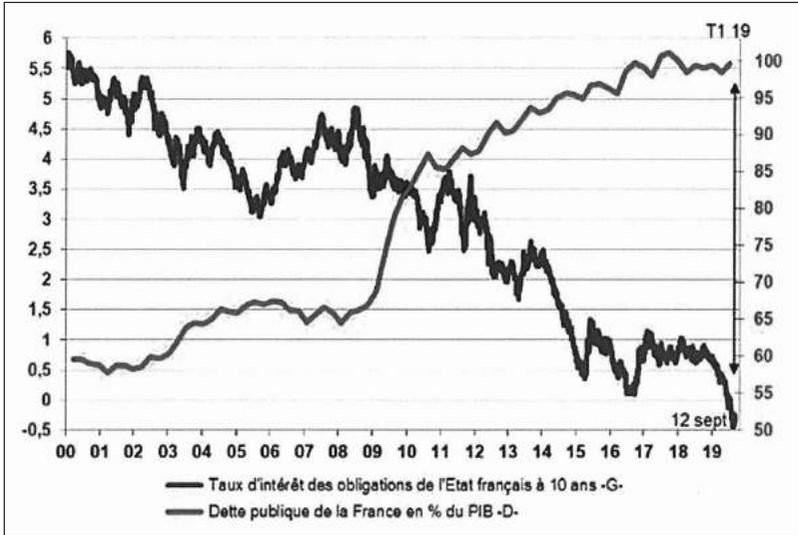
Document 4 : Taux d'intérêt : « La BCE risque de nous mener des paradis artificiels à un enfer bien réel »

En France, plus la dette publique augmente, plus les taux des obligations d'État baissent jusqu'à devenir négatifs, depuis quelques mois. Ce qui incite l'État français à encore laisser filer son déficit et donc sa dette. Face à ces situations anormales et dangereuses, il aurait été bon que la BCE siffle la fin de la récré. Bien au contraire et malheureusement, elle en a décidé autrement, plongeant la France et la zone euro au sens large dans un nouveau paradis artificiel qui risque de rapidement se transformer en un enfer bien réel.

Juste avant de partir en retraite, Mario Draghi est entré dans l'Histoire cette semaine. Après avoir déjà sauvé la zone euro à de multiples reprises, puis abaissé le taux refi (taux de refinancement, principal taux directeur de la BCE) à 0 % et engagé une *Quantitative Easing* (ou QE : rachats d'actifs massifs) de quasiment 3.000 milliards d'euros, il vient d'abaisser le taux de dépôt à - 0,5 %, tout en annonçant une nouvelle phase de « planche à billets » illimitée de 20 milliards d'euros par mois à partir de novembre prochain. (...)

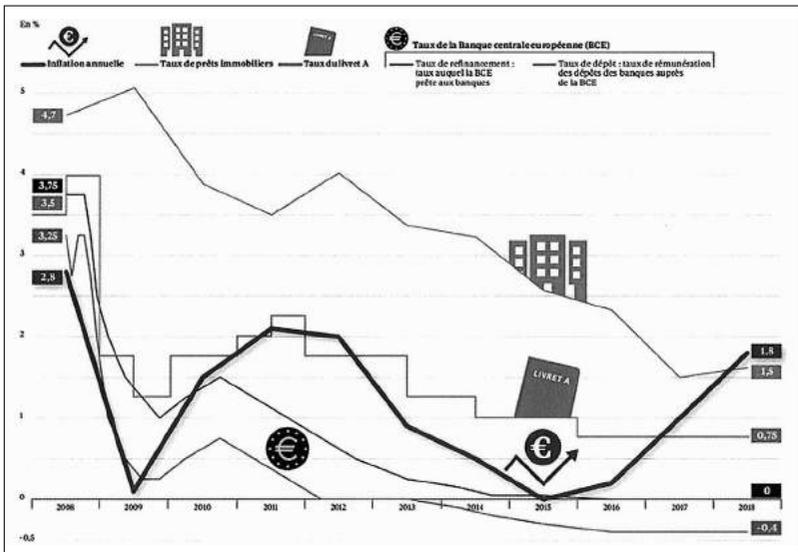
De la même façon, après avoir tué la croissance forte dans les années 2000, la BCE n'a cessé de déverser pléthore de liquidités, mais pour de bien piètres résultats, en l'occurrence une croissance durablement molle. Et ce, au prix d'une « planche à billets » (qui revient à créer de la monnaie *ex-nihilo*, c'est-à-dire sans création de richesse correspondante) extrêmement coûteuse. Et dont on ne mesure pas encore les conséquences négatives de long terme... (...) Non, des taux d'intérêt négatifs des obligations de l'État français ne sont pas normaux. En outre, si, pour le moment, il reste presque impossible de jauger les impacts des excès de liquidités,

il viendra un jour où ces derniers produiront des effets particulièrement négatifs. Et ce, notamment en termes d'inflation, de krachs sur les marchés d'obligations et d'actions et finalement de destruction de richesses.



Source : Marc Touati, 13/09/2019, Capital

Document 5 : Évolution des taux d'intérêt par rapport à l'inflation



Par Frédéric Moyer, professeur en CPGE au lycée Turgot, à Paris.

Rappel du sujet :

À partir du dossier documentaire suivant, vous ferez une note de synthèse de 500 mots environ (à plus ou moins 10 %) sur la situation économique actuelle en présence de taux d'intérêt négatifs.

Composition du dossier documentaire :

Document 1 : Comment expliquer les taux d'intérêt négatifs ? *La finance pour tous*, 18 juillet 2019

Document 2 : Faut-il s'inquiéter d'un monde de taux négatifs ? Delphine Cuny, *La Tribune Hebdomadaire*, 12 septembre 2019

Document 3 : Rencontres d'Aix : les taux négatifs déroutent les économistes, AGEFI, 7 juillet 2019

Document 4 : Taux d'intérêt : « La BCE risque de nous mener des paradis artificiels à un enfer bien réel », Marc Touati, *Capital*, 13 septembre 2019

Document 5 : Évolution des taux d'intérêt par rapport à l'inflation, BDF-BCE, avril 2019

En première approche, juste après lecture du début du sujet ci-dessus.

L'indication initiale de sujet du concepteur est, rappelons-le, incontournable. Il faut donc y prêter une attention particulière. Le sujet porte cette année sur la situation économique actuelle en présence de taux d'intérêt négatifs. C'est un sujet d'une actualité brûlante. Depuis la crise des subprimes, l'étude des politiques monétaires non conventionnelles ne pouvait avoir échappé aux enseignants de la CPGE ECT.

Avant même lecture des documents, leurs titres dessinent une articulation logique sur laquelle il conviendra de revenir après lecture approfondie (I. L'origine des taux directeurs négatifs II. Les conséquences).

Depuis 2016, le taux d'intérêt à 10 ans des obligations d'État de l'Allemagne, bientôt rejoint par celui de la France, est tombé à son plus bas historique, jusqu'à devenir négatif. Le détenteur de tels actifs ne peut ignorer lors de son achat que son rendement sera négatif. Cette situation économique exceptionnelle n'est pas sans risques.

Qu'est-ce qui explique une telle baisse des taux et quelles en sont les conséquences ?**I. L'origine des taux directeurs négatifs**

Les taux d'intérêt négatifs trouvent leur origine dans la politique monétaire non conventionnelle menée après la crise financière de 2008. D'abord pratiqué par la FED, l'assouplissement quantitatif a conduit plusieurs banques centrales des pays développés à acheter des titres de dette

publique avec l'objectif de relancer leurs économies grâce à la baisse des taux d'intérêt. Ces banques centrales ont également fortement diminué leurs taux d'intérêt directeurs.

Cette politique monétaire non conventionnelle a bien eu pour effet un aplatissement de la courbe des taux : les taux d'intérêt à moyen et long terme ont, comme c'était attendu, suivi le mouvement à la baisse des taux directeurs. Les titres souverains n'ont pas échappé à cette baisse qui peut être observée entre 2017 et 2019 pour la courbe des taux des obligations de la France et de l'Allemagne. Au 1^{er} juillet 2019 tous ces taux jusqu'à 10 ans sont négatifs.

II. Des gagnants, des perdants

Les taux d'intérêt négatifs sont favorables aux emprunteurs. Ainsi, les États apparaissent comme les grands gagnants de cette situation qui leur permet de se refinancer à moindre coût, voire d'alléger la dette publique. Le Cour des comptes estime par exemple que le coût de financement de l'État français pourrait diminuer de 4 milliards en 2020. Entreprises et ménages emprunteurs bénéficient également de cette baisse des taux.

En revanche, les prêteurs, notamment les épargnants, sont les principaux perdants. Les taux faibles de leurs placements, désormais parfois inférieurs à l'inflation, conduisent à une érosion de leur capital. C'est particulièrement le cas des Français qui ont une préférence nette pour les produits peu risqués aux rendements faibles. À l'échelle de la zone euro, un eurodéputé estime que « les petits épargnants ont vu un tiers de leur capital partir en fumée en dix ans ». Autres perdants : les banques et les assureurs dont la rentabilité s'érode.

III. Une situation risquée

Les dettes de tous les agents économiques s'envolent, laissant planer le spectre du surendettement et de ses fâcheuses conséquences. Les taux d'intérêt bas voilent la réalité, facilitent les prises de risque excessives, donc repoussent les nécessaires réformes structurelles. Les entreprises « zombies » survivent artificiellement, les dettes étatiques s'envolent, les banques sont fragilisées, les liquidités abondantes et peu coûteuses multiplient les formations de bulles... tous ces risques interpellent sur l'action des banques centrales.

La politique monétaire des banques centrales a conduit à une situation économique extrêmement périlleuse : les dettes ne cessent de croître et les taux d'intérêt de baisser, la croissance reste molle, les économies vivent sous perfusion d'une planche à billets dont les conséquences sont mal maîtrisées. En cas de retour de l'inflation, en hausse dans la zone euro depuis 2015, des krachs menacent.

Malgré les risques induits, ces taux d'intérêt négatifs constituent aussi une aubaine en allégeant la charge de la dette étatique. Plusieurs économistes préconisent d'en profiter pour engager des réformes de long terme et financer la transition écologique.

(544 mots, titres non compris).

QRA : La politique monétaire est-elle actuellement efficace ?

Rappelons à toutes fins utiles que tous les rapports du jury concepteur mentionnent que le traitement de la QRA doit se différencier de celui de la synthèse et qu'il doit être court (maximum 2-3 pages).

La politique monétaire est conduite par les banques centrales qui, pour la plupart, sont désormais indépendantes des pouvoirs publics, conformément aux préconisations de Barro et Gordon. Elle fait l'objet de dissensions au sein des économistes, entre les monétaristes menés par Friedman qui postulent la neutralité de la monnaie et préconisent de ne s'intéresser qu'à la maîtrise de l'inflation, et d'autres, dans la lignée de Keynes, qui pensent pouvoir utiliser la monnaie pour mener des politiques contracycliques, de relance. Le sujet nous invite à nous demander si cette politique monétaire est actuellement efficace. Mais quelle politique monétaire et quel critère d'efficacité ? Car depuis la crise des subprimes, les deux ont évolué.

I. Mesurée par rapport à l'objectif de maîtrise de l'inflation, elle est efficace

Si l'on raisonne en termes monétaristes, la politique monétaire est actuellement efficace. En effet, rappelons que selon Irving Fisher, sur le fondement de sa théorie quantitative, la monnaie est neutre (pour l'économie réelle) donc il est inutile, voire dangereux, d'augmenter la masse monétaire en espérant relancer l'économie (cela ne provoque que de l'inflation, et pas de la croissance). Ce faisant, l'orthodoxie en matière monétaire consiste à ne pas utiliser la monnaie comme instrument de relance de l'économie réelle, à viser la stabilité des prix pour permettre aux agents de former des anticipations, ce qui implique prédictibilité de la politique monétaire et crédibilité des banquiers centraux. Le rôle d'une banque centrale doit donc être cantonné à la maîtrise de l'inflation. La BCE a été instituée en droite ligne de ces préceptes. Le traité de Maastricht stipule que l'objectif principal du SEBC est de maintenir la stabilité des prix. Tous les gouverneurs de la BCE depuis sa création ont été nommés en raison de leur adhésion aux principes monétaristes et de leur aversion à l'inflation. Du point de vue monétariste, la politique monétaire est actuellement efficace, l'inflation ne présente pas de risque de dérapage depuis longtemps.

II. En matière de relance de l'économie, en revanche, son efficacité est limitée

Après la crise des subprimes et face à la gravité de la situation, le cadre monétariste a volé en éclat. Ben Bernanke, alors gouverneur de la Fed, a le premier conduit une politique monétaire visant explicitement à la relance de l'activité. Sa thèse sur l'inaction catastrophique de la Fed après la crise de 1929 a pesé lourd dans sa décision : « L'une des conclusions de mon étude de la Grande Dépression est que l'on a tendance à considérer que l'orthodoxie est une stratégie sûre. Mais la stratégie doit dépendre de la situation. En période de crise, l'orthodoxie peut s'avérer être une très mauvaise stratégie ». Baisse spectaculaire du taux directeur, Quantitative Easing, tout est mis en œuvre pour favoriser la relance. Il sera suivi, de mauvaise grâce et avec retard, par Jean-Claude Trichet à la tête de la BCE. Mais c'est Mario Draghi qui ira le plus loin en la matière dans la zone

euro. Cependant, l'efficacité de ces mesures a été limitée. Les liquidités fort abondantes déversées dans les économies développées n'ont eu que peu d'effets de relance réelle. Une partie d'entre elles a été stérilisée, une autre a irrigué les économies émergentes aux promesses de rendement plus élevé, la dernière, enfin, a alimenté artificiellement les bourses mondiales, conduisant à la formation de nouvelles bulles. La croissance est restée durablement molle, en particulier dans la zone euro, la crise du coronavirus a porté le coup de grâce à des économies sous perfusion.

Pour conclure, on peut dire que la politique monétaire menée dans les grands pays développés¹ reste efficace en matière de maîtrise de l'inflation, même si le spectre de la déflation, dans la zone euro, a laissé craindre un moment un danger pire. En revanche, son évolution après la crise des subprimes afin de lutter contre les menaces de récession, se révèle peu efficace. Pire, elle est porteuse de nombreux risques et sa normalisation semble impossible. Les banquiers centraux sont aujourd'hui privés de marge de manœuvre : toute remontée des taux dans un tel contexte semble interdite et porteuse de menace de krach (Jerome Powell qui l'a tentée pour les États-Unis a dû très vite se raviser), toute nouvelle baisse des taux directeurs ou nouvel assouplissement quantitatif accroît la surabondance de liquidités et les risques induits (vus dans la synthèse). Cette situation inextricable nous invite plus que jamais à réfléchir à la mobilisation pertinente d'outils budgétaires, pour favoriser les leviers de croissance endogène, comme l'a écrit récemment Olivier Blanchard pour l'OCDE.

1. Nous avons volontairement circonscrit le traitement du sujet à ces zones géographiques, ni la synthèse, ni le sujet de QRA ne semblaient suggérer de s'intéresser à la politique monétaire de la Chine, de l'Inde ou de l'Argentine...

ÉCONOMIE

DURÉE : 2 HEURES 30.

Les deux sujets de l'épreuve « Économie » et « Droit » seront traités sur la même copie.

Aucun document n'est autorisé, l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Vous rédigerez une note de synthèse de l'ensemble documentaire fourni en 500 mots environ.

SUJET

La mondialisation est-elle coupable ?

DOCUMENTS

Document 1 : Mondialisation, inégalités et redistribution

[...] La profession économique s'accorde largement à dire que le commerce international est une source importante de gains en termes de bien-être. Ces gains proviennent d'une meilleure allocation des ressources et de plus grandes économies d'échelle, et se traduisent finalement par des coûts de production et des prix plus faibles et une plus grande variété de produits disponibles. Le contraste est flagrant avec l'opinion publique comme le révèlent plusieurs sondages récents (Printemps de l'économie, 2018) : 60 % des Français ont une mauvaise opinion de la mondialisation et 13 % seulement sont favorables à une plus grande ouverture des échanges commerciaux. Les Français sont davantage critiques de l'intégration commerciale que les Allemands : 75 % des Français et 57 % des Allemands sont favorables à plus de protection contre la concurrence étrangère. Cette crainte de l'ouverture à l'international s'inscrit dans une méfiance plus générale : 47 % des Américains et 36 % des Français souhaitent faire davantage pour se protéger du monde d'aujourd'hui. Dans le même temps, 68 % des Français et 55 % des Allemands considèrent que la mondialisation accroît les inégalités sociales. Sur ce dernier point, les économistes sont largement d'accord : ils établissent, en effet, que depuis près de trente ans l'accélération du phénomène de mondialisation des échanges commerciaux augmente la concurrence entre les marchés, souvent au détriment de certaines catégories de travailleurs dans les pays avancés. Plusieurs études empiriques ont évalué l'impact de l'augmentation des importations en provenance des

pays émergents et en développement (principalement la Chine), et celui de l'introduction de nouvelles technologies. Si l'augmentation des inégalités et l'évolution des salaires et de l'emploi dans les pays avancés sont en partie imputables à l'augmentation des importations en provenance des pays émergents et en développement, ces travaux concluent cependant que le changement technologique a joué un rôle plus important que le commerce. Les différents travaux trouvent que les bassins régionaux d'emploi les plus exposés à la concurrence des importations chinoises – intensives en travail non qualifié – sont ceux qui ont connu le plus important déclin de l'emploi manufacturier. Mais les gains d'emploi manufacturier provenant des exportations totales sont du même ordre de grandeur que les pertes provenant des importations de Chine dans le cas des États-Unis et l'effet net sur l'emploi du commerce de biens et services des États-Unis est probablement très limité à l'échelle de l'économie. [...] Les estimations effectuées dans cette Note confirment la vision des économistes d'un commerce international source de gains nets pour les pays qui libéralisent les échanges. Contrairement à la vision de l'actuelle Administration américaine, le commerce est un jeu à somme positive. Ces gains sont toutefois inégalement répartis et créent des perdants. Les critères et les modalités des transferts des gagnants vers les perdants de la mondialisation doivent être repensés : les pays industrialisés, à l'exception peut-être des pays scandinaves, ont échoué à redistribuer les bénéfices de la mondialisation. À cet égard, le fait que la politique commerciale ait été déléguée au niveau européen, justifie la mise en place d'un instrument européen visant à atténuer les conséquences négatives de la libéralisation des échanges. Cet instrument existe, c'est le Fonds européen d'adaptation à la mondialisation, mais les missions et les moyens qui lui ont été confiés sont notoirement insuffisants. Il est certes difficile d'identifier les pertes d'emploi spécifiquement imputables à la libéralisation des échanges, mais cela ne devrait pas être un obstacle à un soutien européen visant l'accompagnement de bassins d'emploi durement touchés par le chômage. En outre, alors que la mondialisation commerciale requiert des moyens, en particulier fiscaux, pour redistribuer ses gains et accompagner efficacement les plus fragiles, la mondialisation financière, via la mobilité du capital, de la production et de la base taxable, en particulier celle des grands groupes, rend plus difficile cette redistribution. En pratique, elle soumet, avec la concurrence et l'optimisation (voire l'évasion) fiscale, nos systèmes de redistribution à une pression sans précédent. L'intégration commerciale pousse aussi à cette concurrence fiscale car elle facilite la délocalisation de la production en réponse à des avantages fiscaux. C'est pourquoi la soutenabilité politique de la mondialisation requiert de lier les sujets de libéralisation commerciale et les sujets de concurrence fiscale. Cette soutenabilité est aujourd'hui remise en cause dans la plupart des pays avancés qui se trouvent confrontés à des mouvements d'opinion en faveur d'une plus grande protection. [...]

Source : Sébastien Jean, Philippe Martin et André Sapir, notes du CAE n° 46, juillet 2018.

Document 2 : Effets de l'introduction d'un nouveau droit de douane stabilisant le commerce international sur les émissions de CO₂ et la croissance du PIB réel à l'horizon 2030

	Effet sur les émissions de CO ₂ en %	Effet sur le PIB en dollars constants en %
Union européenne	- 7,9	- 0,8
États-Unis	- 3,0	- 0,6
Chine	- 2,6	- 2,9
Reste du monde	- 3,5	- 2,3
Monde	- 3,5	- 1,8

Note de lecture : Selon les auteurs de la note, l'instauration d'un droit de douane uniforme moyen de 17 % sur les échanges de biens dans le monde permettrait de stabiliser le commerce international à son niveau actuel. Cela réduirait les émissions de CO₂ mondiales de 3,5 % à l'horizon 2030 mais diminuerait le PIB réel mondial de 1,8 %.

Source : Lionel Fontagné et Jean Fouré, *Focus du CAE* n° 15, janvier 2017.

Document 3 : Commerce international et environnement : dumping environnemental ou commerce durable

[...] Les économistes se sont intéressés tardivement aux relations entre commerce international et environnement dans la mesure où l'impact du commerce sur le volume des richesses produites reste l'enjeu principal des théories du commerce international. Les travaux se sont intensifiés dans les années 1990, autour des débats sur les négociations de l'Accord de libre-échange nord-américain (Aiena) (Grossman et Krueger, 1993) et à mesure de l'accroissement des volumes échangés qui ont été multipliés par 9 entre 1980 et 2014. [...] Le rapport Brundtland issu de Rio (1992) cherche ainsi à relier les deux défis que sont l'écologie et le développement, la priorité étant de « placer les enjeux de la conservation de la nature et de la gestion durable des ressources naturelles au sein d'un projet de développement pour l'humanité » (Aggeri et Godard, 2006, p. 10). Au-delà de l'effet direct sur les émissions dues au transport de marchandises, les travaux théoriques ont mis en évidence trois principaux mécanismes par lesquels le commerce peut avoir un impact négatif sur l'environnement (Copeland et Taylor, 2004) :

- « l'effet d'échelle » : un accroissement du commerce peut induire une augmentation de la production et donc, toutes choses égales par ailleurs, un accroissement des émissions de gaz à effet de serre.
- « l'effet de composition » : la libéralisation commerciale déplace la production des biens et services en fonction des avantages comparatifs des pays qu'elle concerne. Ainsi, compte tenu des prix, la production peut être relocalisée vers des pays à fortes émissions unitaires (ou inversement).
- « l'effet technique » : le commerce peut rendre disponibles certaines technologies, ou en réduire le coût et ainsi modifier les modes de production,

et donc les intensités d'émission. Les discussions sur les biens environnementaux en cours à l'Organisation Mondiale du Commerce visent ainsi à réduire les barrières tarifaires des technologies les moins polluantes.

[...] Le commerce international est de plus en plus le fait de firmes globales : qu'elles externalisent leur activité productive à l'échelle du monde pour tirer parti de l'avantage comparatif des régions d'implantation, ou qu'elles sous-traitent à l'aide de vastes réseaux mondiaux, elles sont les acteurs d'une globalisation productive et réalisent aujourd'hui trois-quarts du commerce international (Ghorra-Gobin, 2012). Cette dynamique majeure s'accompagne d'une autre dynamique à l'échelle des États, le « dumping environnemental » (ecological dumping) : celui-ci définit l'attitude d'un État qui cherche à accroître la compétitivité des entreprises présentes sur son territoire (nationales et étrangères) en allégeant les dispositions législatives environnementales. Le « dumping environnemental » crée ainsi une sorte de rivalité entre États en matière de réglementation de la pollution globale, en vue d'attirer des investissements internationaux (Rieber, 2008). [...]

Dans un cadre de prise de conscience globale des dangers encourus par les populations du fait du réchauffement climatique et de l'épuisement des ressources, les discours sur un commerce et des échanges durables et respectueux de l'environnement se multiplient [...]. La mise en place d'un commerce durable ne peut être souscrite à l'échelle nationale, dans la mesure où les interactions internationales sont indéniables et où les grandes conventions internationales fixent les modalités à une échelle globale avec par exemple les Accords Environnementaux Multilatéraux (protocole de Kyoto, plan de Johannesburg sur le développement durable), aux bilans controversés. L'enjeu de la volatilité des prix, notamment alimentaires, et des normes et standards publics et privés, est de taille. Aussi les liens entre commerce, droits de l'homme et normes sociales et environnementales sont-ils devenus un élément clé des relations économiques et sociales entre États. En témoigne le chapitre développement durable des Accords de libre-échange (ALE) signés par l'Union Européenne, qui, depuis 2006, intègre ces normes dans tous les accords commerciaux négociés. Toutefois, ces politiques commerciales restent incitatives, en témoignent les parties qui visent à soutenir le développement durable par le commerce en promouvant, si elles le souhaitent et selon les marchés publics, des labels écologiques et équitables. Le droit de l'environnement reste encore ambigu : chaque État peut définir et réglementer ses propres niveaux de protection de l'environnement sur son territoire (« droit à réguler »), ce qui contribue finalement à encourager le « dumping environnemental ».

Source : Lisa Rolland, *Regards croisés sur l'économie* n° 21, février 2017.

Document 4. Les conséquences de la mondialisation du commerce

[...] Au niveau des inégalités au sein des pays, il faut aussi faire une distinction entre le début du processus de mondialisation (fin des années 1980), et la deuxième vague à partir des années 2000. Il n'y a pas de doute que l'envolée du commerce et la redistribution des activités vers l'Asie ont eu un impact négatif sur la rémunération des travailleurs non qualifiés dans les pays développés. Aux États-Unis, ce processus est clair, mais il l'est moins en Europe, dans la mesure où il y a une protection des salariés moins qualifiés beaucoup plus forte – le salaire minimum en France, ou les accords de

branche en Allemagne qui fixent des salaires minima. Cela étant, on peut penser que l'impact de cette transformation se situe au niveau du chômage en Europe, en somme un autre type d'inégalité, qui a touché la plupart des pays européens. Certains ont récupéré vite, d'autres moins – et l'on peut penser que les rigidités du marché du travail en France ont empêché une récupération rapide. Ce processus de mondialisation a été le produit des multinationales. Dans ce contexte, le facteur qui devait gagner était sans aucun doute le capital. C'est un phénomène que l'on observe partout, dans tous les pays du monde – une évolution du partage entre capital et travail au niveau du PIB qui évolue en faveur du capital de manière radicale, et ce depuis les années 1980. Dans la mesure où le capital est surtout détenu par les individus les plus aisés, ce phénomène a donc entraîné une hausse des inégalités, mais cette fois-ci par le haut. Il ne faudrait pas considérer, cependant, que tout est dû à l'évolution du commerce mondial. Il y a toujours eu un débat important à ce sujet : certains considèrent que la hausse des inégalités aux États-Unis a été le fruit de l'explosion du commerce mondial, et d'autres considèrent que c'est le résultat de l'évolution technologique. Un article récent de David Autor (2016) montre que l'impact de la Chine a été considérable, mais on ne peut certainement pas évacuer la technologie. La technologie a permis un deuxième type de mondialisation, la mondialisation des services, à travers les facilités de communication et internet. Le fait que les banques aient leur service comptable en Inde ou éventuellement en Afrique, et plus généralement l'ensemble des opérations d'offshoring¹ ont eu un impact sur les employés des pays développés dans ces domaines (les comptables par exemple). La mondialisation ne peut être pensée comme indépendante de l'évolution technologique. Il y a dans la mondialisation une mise en concurrence des unités de production au niveau mondial, qui est censée produire des activités de Recherche et Développement plus intenses, et de fait des innovations plus rapides. [...]

Source : François Bourguignon, *Regards croisés sur l'économie*, n° 21, février 2017.

Document 5 : La difficile conciliation entre commerce et climat

Au moment même où le commerce mondial ralentit, la tentation protectionniste ressurgit dans les pays avancés, avec deux sources distinctes de motivations : l'emploi et la question environnementale. L'impact du commerce international sur le marché du travail est avéré. L'avantage comparatif des pays avancés s'étant déplacé vers les services, la spécialisation renforce la désindustrialisation et détruit donc des emplois industriels (tout en créant des emplois dans d'autres secteurs). Le commerce est toutefois loin d'expliquer à lui seul le recul de l'emploi industriel. Il renforce aussi, dans tous les secteurs, y compris les services, les inégalités aux dépens des salariés accomplissant des tâches répétitives et codifiables. De son côté, le motif environnemental supposé justifier un certain protectionnisme convoque l'idée du « buy local² » c'est-à-dire des circuits courts : pourquoi faire venir de contrées lointaines ce que l'on pourrait produire à domicile, en économisant ainsi le coût de transport et les émissions de CO₂ associées, en

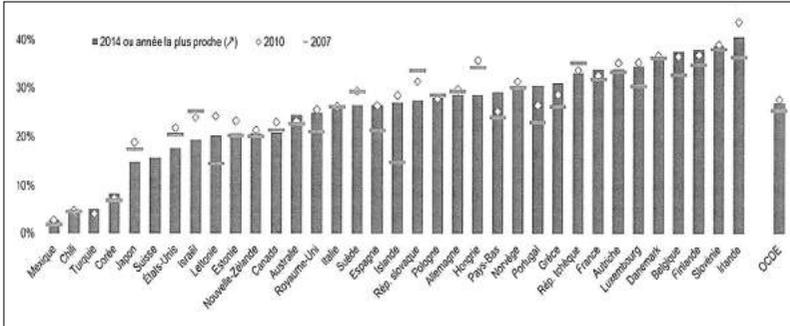
1. *Offshoring* : délocalisation

2. *Buy local* : acheter local

favorisant en sus l'emploi local et la qualité des produits et en supprimant de nombreux intermédiaires inutiles ? Ces arguments, souvent appliqués aux produits agroalimentaires, ne sont pas sans fondements : la spécialisation agricole entraîne l'utilisation accrue de produits phytosanitaires dégradant l'environnement, tandis que la distance géographique et la multiplication des intermédiaires aggravent les problèmes d'information sur les produits. Cependant, la distance entre lieux de production et de consommation donne une information inexacte sur les émissions de CO₂ associées aux biens consommés : le mode de production importe souvent davantage que le transport, et l'impact environnemental de ce dernier dépend fortement, au-delà du mode de transport et des kilomètres parcourus, de la performance du système logistique. Enfin c'est fréquemment la performance environnementale des derniers kilomètres pour atteindre le consommateur qui est très médiocre, quel que soit le lieu de production des biens. Concentrer les productions dans les localisations les plus efficaces peut donc être source aussi d'efficacité environnementale. Cette note réexamine l'argument environnemental dans une perspective de contestation du libre-échange et de nécessité de parvenir à une réduction ambitieuse des émissions de gaz à effet de serre au niveau mondial. [...] Nous concluons que ce n'est pas le libre-échange qui détruit le climat, mais le fait que celui-ci se développe en l'absence d'une tarification du carbone d'application suffisamment générale et au niveau approprié. Ce ne sont donc pas tant les engagements pris à l'OMC que le déficit de politiques environnementales qui posent fondamentalement problème. À cet égard, la régulation des émissions doit privilégier les instruments de premier rang, c'est-à-dire des politiques environnementales efficaces de tarification du carbone. Restreindre le commerce international pour réduire les émissions serait une solution excessivement coûteuse pour l'activité et l'emploi. Une voie bien plus prometteuse serait de s'appuyer sur la politique commerciale pour entraîner les pays émetteurs de gaz à effet de serre dans une solution coopérative de premier rang consistant à laisser le commerce international se déployer, mais sous condition d'une tarification adéquate du carbone. Pour appuyer la mise en place de politiques coopératives, le protectionnisme environnemental peut donc être envisagé de façon temporaire à l'encontre de pays enclins à adopter un comportement de passager clandestin, afin de les inciter à rejoindre des accords climatiques aptes à faire adhérer un maximum de pays à des objectifs contraignants. [...]

Source : Dominique Bureau, Lionel Fontagné et Katheline Schubert, notes du CAE n° 37, janvier 2017.

Document 6 : Réduction en pourcentage des inégalités de revenu marchand par les impôts et les transferts en 2007, 2010 et 2014 (ou année la plus proche) au sein de la population d'âge actif



Note de lecture : La redistribution est définie comme la différence entre les inégalités de revenu marchand et de revenu disponible, en pourcentage des inégalités de revenu marchand.

En Lettonie, les impôts et les transferts ont permis de réduire les inégalités de revenu marchand au sein de la population d'âge actif de 15 % en 2007, de 24 % en 2010 et de 20 % en 2014 (ou année la plus proche).

Source : Le point sur les inégalités de revenu, OCDE, novembre 2016.

CORRIGÉ

Par Frédéric Larchevêque, professeur de chaire supérieure au lycée Jules Michelet, à Vanves.

Synthèse La mondialisation est-elle coupable ?

Synthèse rédigée en 545 mots titre et sous titres compris comme il est d'usage

60 % des français ont une mauvaise opinion de la mondialisation et 75 % souhaiteraient être protégés de la concurrence étrangère. Les opinions publiques des pays avancés imputent en effet au commerce international le creusement des inégalités et la dégradation de l'environnement.

Mais la mondialisation est-elle vraiment responsable de ces deux maux de notre temps ? La solution peut-elle venir d'une réduction des échanges internationaux ?

Les critiques adressées à la mondialisation ne sont pas sans fondements (I), mais plus qu'à sa remise en cause fondamentale, il convient d'en solutionner les failles actuelles (II)

I. Les critiques adressées à la mondialisation ont un fondement réel

A. Le rôle du commerce international dans le creusement des inégalités

En favorisant depuis les années 2000 une redistribution de la production manufacturière mondiale vers l'Asie, la mondialisation a exposé les travailleurs de l'industrie des pays avancés à une concurrence nouvelle. Le résultat a été un affaiblissement de la rémunération du travail par rapport au capital et la dégradation de la situation des travailleurs les moins qualifiés voués à la stagnation de leurs rémunérations ou à la disparition de leur emploi. La mondialisation fait incontestablement des perdants.

B. La responsabilité du commerce international dans la dégradation du climat

Le commerce international est accusé d'avoir à la fois impacté le volume et la répartition des rejets de gaz à effet de serre dans le monde. Le transport international de biens a d'abord un effet direct a priori positif sur les émissions de CO₂. Ensuite, le commerce international a aussi des effets indirects sur le climat dont la somme est au final ambigu. Il affecte le volume des émissions si l'effet d'échelle est plus puissant que l'effet progrès technique et il modifie la répartition des sources d'émission mondiales selon l'évolution des spécialisations des nations.

II. Plutôt que de réduire les échanges, il est préférable de réguler la mondialisation

A. Réduire les échanges internationaux n'est pas la solution

Limiter les échanges internationaux pour réduire les inégalités et préserver le climat reviendrait à se priver d'une partie des gains du libre-échange et à opter pour une solution inefficace. Selon une étude, une hausse des droits de douane moyens à 17 % aurait pour effet de réduire le PIB mondial de 1,8 % pour une diminution de seulement 3,5 % des rejets de CO₂ à l'horizon 2030. Il ne faut pas oublier que le progrès technique a un rôle important dans le creusement des inégalités et qu'il est aussi une partie de la solution au problème du climat.

B. Réguler les failles de la mondialisation

Au fond, c'est moins la mondialisation en soi qui pose problème que son insuffisante régulation. La mobilité du capital alimente la concurrence fiscale entre les États et crée les conditions d'un véritable dumping environnemental entre les territoires. Résultat, les États n'ont pas les moyens d'une redistribution plus juste des revenus et certains préfèrent alléger les normes environnementales pour améliorer la compétitivité de leurs entreprises et attirer les IDE. Fait symptomatique, dans la majorité des pays de l'OCDE, la réduction des inégalités de revenu a stagné ou reculé depuis 2010.

Conclusion

L'avenir de la mondialisation dépend de la capacité des États à réussir à lier la libéralisation des échanges au règlement de la concurrence fiscale et intégrer à la politique commerciale une taxe carbone aux frontières.

DROIT

DURÉE : 1 HEURE 30.

ESSEC
BS

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

Aucun document n'est autorisé, l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

PREMIÈRE PARTIE : MISE EN SITUATION JURIDIQUE

Cas Société d'architectes Numérobis

Numérobis est une agence d'architecture, de maîtrise d'œuvre et d'urbanisme, dirigée par ses deux fondateurs, Charles Dumoulin et Jean Domat. Elle conçoit et pilote la réalisation de nombreux projets d'architecture allant du plan d'urbanisme aux projets de bâtiments publics ou privés en passant par la création de bureaux, de logements ou d'équipements industriels.

Numérobis s'efforce d'apporter les meilleures réponses possibles aux relations entre le bâtiment et son environnement. L'évolution de la taille des villes et l'urbanisation de la planète obligent l'architecture à se qualifier par rapport à l'espace urbain, c'est-à-dire à continuellement considérer que le bien-être des hommes réside dans l'harmonie de la relation entre Architecture et Urbanisme.

Les dirigeants de Numérobis ont d'autre part choisi de pratiquer un modèle de management innovant, conforme à leurs convictions humanistes.

Jean Domat souhaite bénéficier de votre expertise et vous demande d'étudier certains dossiers délicats en donnant un avis motivé et synthétique sur les difficultés juridiques qu'ils soulèvent...

Questions :

1. Après le départ à la retraite de leur fidèle comptable (25 ans de travail dans l'Agence), Jean Domat et Charles Dumoulin ont souhaité pouvoir donner une chance à de jeunes diplômés en leur proposant un contrat de travail d'un an éventuellement renouvelable. À l'issue de chaque contrat, un nouveau jeune comptable est recruté, ce qui permet à de nombreux diplômés d'intégrer le marché du travail et de bénéficier d'une première expérience professionnelle de qualité. Ce système a correctement fonctionné pendant plusieurs années mais Louis Mandrin, le dernier comptable recruté il y a deux ans, refuse de

partir et réclame une lourde indemnité de licenciement. Pour Jean Domat, cette demande est d'autant plus injustifiée que le contrat a été signé pour une durée d'un an alors que le jeune comptable a été autorisé à rester dans la Société 12 mois supplémentaires.

La demande de Louis Mandrin vous semble-t-elle fondée ?

2. Les dirigeants de Numérobis envisagent d'aménager les combles de leur immeuble pour créer une cuisine/salle à manger ainsi qu'une salle de repos. Il s'agit de donner aux salariés de l'Agence la possibilité de pouvoir déjeuner sur place dans un décor cosy et une ambiance conviviale. À cet effet, Jean Domat a sollicité le 20 janvier 2020 plusieurs entreprises spécialisées en aménagement et décoration d'intérieur. Après étude de leurs devis respectifs, reçus entre le 10 et le 12 février, il a décidé de retenir celui proposé par la société Cartouche dont le prix total (conception et réalisation) se monte à 45 000 euros. Mais, lorsque le 15 février Jean Domat annonce par mail à l'entreprise Cartouche que son devis a été sélectionné, son directeur, Louis-Dominique Cartouche, répond par retour de mail que les tarifs ont été augmentés et que le prix total des travaux est désormais fixé à 49 500 euros.

Jean Domat est-il en droit de solliciter l'exécution de la prestation au prix prévu initialement de 45 000 euros ?

3. Depuis plus de vingt ans, la société Numérobis a développé un partenariat avec l'entreprise générale de bâtiment Faouët. Cette entreprise a en effet la capacité de réaliser tous types de travaux (construction d'immeubles neufs, réhabilitation, renforcement de structure, surélévation...) en respectant les contraintes de délais et de qualité. Numérobis sollicite régulièrement l'entreprise Faouët pour la réalisation de ses projets à tel point que les multiples contrats conclus entre les deux sociétés permettent à l'entreprise Faouët de réaliser l'essentiel de son chiffre d'affaires. Toutefois, les relations entre Madame Marion, directrice de l'entreprise Faouët et Jean Domat se sont détériorées. Celui-ci décide d'interrompre immédiatement toute relation entre les deux entreprises à l'issue de la réalisation des contrats en cours.

Quelles peuvent être les conséquences juridiques de la décision de Jean Domat ?

DEUXIÈME PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

« Quelles sont les limites juridiques à la diffusion d'informations par les entreprises ? »

Vous répondrez à cette question dans un bref développement en illustrant vos propos par plusieurs exemples issus notamment de votre activité de veille juridique.

CORRIGÉ

ESSEC
BS

CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur en CPGE au lycée René Cassin, à Strasbourg.

Éléments de correction :

La logique de l'exercice « corrigé express » est d'indiquer les éléments succincts mais incontournables du sujet 2020.

Le cas pratique est ici traité plus complètement que la veille juridique, pour laquelle seules des informations succinctes sont données.

Remarques préliminaires :

Les compétences recherchées devaient être :

- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (syllogisme).

Il était donc indispensable d'utiliser la démarche du syllogisme pour répondre aux différentes demandes :

- Réponses justifiées en fait (travail de qualification des faits : compréhension et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- Réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle règle de droit est nécessaire à la solution proposée).

Remarques liminaires :

La formulation du sujet **ESSEC** dans un questionnement classique après la réforme de 2016 du droit des obligations et la qualification d'une clause abusive, évoquait le droit du travail, les relations commerciales et... le droit des obligations !

PREMIÈRE PARTIE : CAS PRATIQUE

1^{re} situation

Les faits :

La gestion des ressources humaines de la société Numerobis repose sur une utilisation régulière de contrats à durée déterminée d'un an, renouvelé une autre année. Il n'est pas fait mention d'information quant à la possibilité qu'il s'agit de contrat à objet défini (ou contrat de mission). Un salarié estime qu'il n'a pas à quitter l'entreprise à l'issue du contrat renouvelé. À défaut il réclame une forte indemnité de licenciement.

Le problème juridique et les points de droit :

Le questionnement portait sur les caractéristiques d'un contrat à durée déterminée (conditions pour contracter, durée de 18 mois max. et renouvelable deux fois dans cette limite temporelle). À défaut, l'employeur risque la requalification en contrat de travail à durée indéterminée et le paiement d'une indemnité de requalification si le CDD avait été conclu irrégulièrement. Dans tous les cas, la rupture du nouveau CDI entraîne le versement d'indemnités de licenciement.

La solution (proposition) :

Aucune circonstance ici évoquée ne permet de valider l'emploi en CDD (pas d'accroissement d'activité, de saisonnalité ou d'usage normal d'un CDD). Par ailleurs le renouvellement du CDD porte à 24 mois la durée totale du contrat.

Il y aura requalification en CDI, versement d'une indemnité de requalification et en cas de licenciement d'indemnités.

2^e situation**Les faits :**

Pour la rénovation des locaux professionnels, Jean DOMAT accepte un devis par mél. Mais sitôt accepté, l'entrepreneur modifie les tarifs et exige une somme supplémentaire de 4 500 euros. Le client souhaite faire exécuter les travaux au tarif accepté.

Le problème juridique et les points de droit :

Il s'agit ici de déterminer les conditions d'acceptation d'une offre et donc de la formation d'un contrat. L'engagement est conclu à partir du moment où la volonté d'accepter l'offre est exprimée clairement : l'article 1113 du Code civil prévoit que « *le contrat est formé par la rencontre d'une offre et d'une acceptation par lesquelles les parties manifestent leur volonté de s'engager.* »

La solution (proposition) :

A priori Jean DOMAT pourrait demander l'exécution du contrat du fait de l'acceptation du devis à 45 000 euros et non 49 500 comme proposé après l'acceptation. Il pourrait être en difficulté pour prouver l'acceptation par mél (article 1315 du Code civil).

Par ailleurs, l'entrepreneur pourrait tenter de prouver une imprévision : « *Si un changement de circonstances imprévisibles lors de la conclusion du contrat rend l'exécution excessivement onéreuse pour une partie qui n'avait pas accepté d'en assumer le risque, celle-ci peut demander une renégociation du contrat à son cocontractant* » prévue à l'article 1134 du même code.

3^e situation**Les faits :**

La société Numerobis a développé depuis longtemps (plus de 20 ans) une relation commerciale importante (l'essentiel de son chiffre d'affaires) avec l'entreprise Fauoët. Des relations personnelles difficiles entre les dirigeants des deux entreprises amènent Jean DOMAT à rompre toute relation à la fin des contrats en cours.

Le problème juridique et les points de droit :

Toute la subtilité du cas tenait dans cette dernière notion : rupture « à l'issue de la réalisation des contrats en cours ». Il n'existe pas de contrat perpétuel en Droit français et mais celui-ci protège les relations commerciales qui si elles étaient rompues brutalement et causeraient un dommage au partenaire en commettant un abus (L'article L. 442-6-I-5 du Code de commerce prévoit qu'« *engage la responsabilité de son auteur et l'oblige à réparer le préjudice causé le fait, par tout producteur, commerçant, industriel ou*

personne immatriculée au répertoire des métiers [...] de rompre brutalement, même partiellement, une relation commerciale établie, sans préavis écrit tenant compte de la durée de la relation commerciale et respectant la durée minimale de préavis déterminée, en référence aux usages du commerce, par des accords interprofessionnels. »

La solution (proposition) :

- La première solution est d'estimer que les contrats en cours étant échus, Monsieur DOMAT pouvait ne plus faire appel à son fournisseur.
- Sinon, il serait fautif d'avoir commis une rupture brutale : il interrompt immédiatement, après 20 ans de partenariat privant son fournisseur de l'essentiel de son chiffre d'affaires.

DEUXIÈME PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

Quelles sont les limites à la diffusion d'informations par les entreprises ?

Il fallait se poser la question de qui est émetteur d'informations (RH, gestion-finance, commerciale) et pour quels destinataires (salariés ou candidats à un emploi, clients, fournisseurs).

Vous pouviez alors faire une distinction tout à fait classique mais efficace car le temps manque : diffusion interne / externe et évoquer les logiques de sincérité, de loyauté, de protection des données.

DROIT

DURÉE : 1 HEURE 30.

Aucun document n'est autorisé, l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S U J E T

PREMIÈRE PARTIE : SITUATION JURIDIQUE

Cas « Entreprise Ambiance & Relaxation »

Vous étudierez les situations suivantes, à l'appui de la documentation juridique fournie en annexe, en apportant des réponses argumentées en droit et en fait.

Le 6 mars 2013, Alexandre RIGOT, artisan plombier à Amiens, crée la SARL « Ambiance et Relaxation » dont l'activité est dédiée à la vente de matériaux pour la création ou rénovation de salles de bain. Le 29 mars 2013, est inauguré le show-room de 350 m² sur la commune d'Amiens. Destiné aux particuliers et aux professionnels, il permet aux premiers de repérer des univers de salle de bain à leur goût et de choisir leurs matériaux ; aux seconds d'avoir à disposition plusieurs marques et fournisseurs de carrelage, robinetterie, meubles... Alexandre RIGOT mise sur la qualité haut de gamme des produits qu'il propose pour rapidement gagner une notoriété dans le milieu.

Trois ans plus tard, la SARL « Ambiance et Relaxation » détient une part importante du marché, se retrouvant en position de leader dans la zone d'Amiens. Alexandre RIGOT a, alors, l'idée de créer un annuaire référençant des artisans locaux titulaires de la « charte qualité » délivrée par la chambre de métier et de l'artisanat des Hauts-de-France avec lesquels il serait en partenariat. Rapidement, la réputation professionnelle d'Alexandre RIGOT lui permet de pouvoir s'appuyer sur un réseau composé de 55 artisans et de fonder le Club « Artisans Confiance » dont il est le président. En parallèle, il opère une modification des statuts de la SARL « Ambiance et Relaxation » pour lui octroyer une activité de conseils et de support technique à destination des professionnels membres du club « Artisans Confiance ».

La SARL « Ambiance et Relaxation » offre aux membres du club « Artisans Confiance » divers avantages :

- une remise exclusive de 15 % sur les produits hauts de gamme qu'elle vend ;

- un petit déjeuner tous les mois pour mettre en avant de nouveaux produits, permettre aux artisans membres d'échanger sur les chantiers en cours et de se communiquer les coordonnées de clients qu'ils n'ont pas le temps de satisfaire.

Ainsi, les artisans membres bénéficient d'un soutien économique fort de la SARL « Ambiance et Relaxation » et peuvent créer une véritable dynamique de collaboration. Grâce à ce réseau d'artisans, « Ambiance et Relaxation » réalise 62 % de son chiffre d'affaires. En trois ans, la SARL a assis sa position de leader sur le marché des matériaux haut de gamme pour la salle de bain dans le nord de la France en augmentant chaque année son chiffre d'affaires d'environ 15 %.

Situation 1

Les époux DURANCHON décident de refaire leur salle de bain. En effet, prenant tous les deux de l'âge, ils envisagent de remplacer leur baignoire par une douche à l'italienne. N'ayant eu que de bons échos de la SARL « Ambiance et Relaxation », ils se rendent dans le show-room pour rencontrer un commercial. Alexandre RIGOT, présent ce jour-là, accueille les époux DURANCHON et identifie rapidement leurs besoins. Il les met alors en relation avec un artisan appartenant au club « Artisans Confiance » tout en leur présentant les produits.

Après le rendez-vous avec Magali TRAMIN, l'artisan recommandé, et muni du croquis réalisé par celle-ci, les époux DURANCHON choisissent les matériaux auprès de la SARL « Ambiance et Relaxation ».

1. Identifiez les différents acteurs en présence et qualifiez leur relation.

Les travaux commencent pour le plus grand plaisir des époux DURANCHON. Mais, leur plaisir est de courte durée étant donné que Magali TRAMIN a décidé de réaliser une douche avec une marche. Très étonnés de cette décision, ils demandent à l'artisan des explications. C'est alors que Magali TRAMIN les renvoie à l'article 7 du contrat qu'ils ont signé. Les époux DURANCHON, furieux, se rendent dans le show-room de la SARL « Ambiance et Relaxation ». Alexandre RIGOT leur conseille de prendre contact avec une association de consommateurs.

2. L'association de consommateurs incite les époux DURANCHON à saisir la commission des clauses abusives, expliquez pourquoi.

Situation 2

Alexandre RIGOT, mécontent du retour des époux DURANCHON sur le comportement de Magali TRAMIN, décide de mettre un terme à leur relation contractuelle et de l'exclure du club « Artisans Confiance ». Celle-ci n'est absolument pas d'accord, d'autant que travailler avec la SARL « Ambiance et Relaxation » lui garantit non seulement une certaine notoriété mais lui assure également un revenu confortable. En effet, depuis trois ans, être membre du club « Artisans Confiance » et travailler avec la SARL « Ambiance et Relaxation » lui garantissent une clientèle aisée lui permettant de réaliser entre 55 et 82 % de son chiffre d'affaires selon les commandes et mois de l'année.

3. Proposez une résolution du cas pratique ci-dessus en conseillant Magali TRAMIN sur l'action en justice qu'elle peut tenter en précisant la juridiction compétente.

Documentation juridique

- **Annexe 1** : La charte qualité de la Chambre des Métiers et de l'Artisanat des Hauts-de-France
- **Annexe 2** : Extrait du contrat entre les époux DURANCHON et Magali TRAMIN
- **Annexe 3** : Extrait du contrat liant la SARL « Ambiance et Relaxation » aux artisans membre du club « Artisans Confiance »

DEUXIÈME PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

Rappel thème de veille juridique pour la session 2020 : « Le cadre juridique relatif à la production, l'utilisation et la diffusion de l'information ».

À partir de la veille juridique que vous avez réalisée au cours de l'année 2019, vous traiterez le sujet suivant au travers de quatre exemples, dont vous prendrez le soin de justifier le choix, et en ne dépassant pas deux pages au total :

L'évolution des obligations des professionnels en matière de production, d'utilisation et de diffusion de l'information a-t-elle un impact sur la protection des consommateurs ?

Annexe 1 : La charte qualité de la Chambre des Métiers et de l'Artisanat des Hauts de-France

LA QUALITÉ ARTISANALE, ÇA NE S'IMPROVISE PAS !

Les 3 Chartes Qualité® encouragent les chefs d'entreprises artisanales volontaires, à améliorer et faire reconnaître la qualité de leurs produits et services.

Elles vous permettront de mettre en place une démarche de progrès, adaptée aux attentes de vos clients et aux besoins de votre entreprise, quel que soit votre secteur d'activité ou le nombre de salariés.

La Charte Qualité Confiance® – La satisfaction de vos clients avant tout :

- Offrez un accueil personnalisé à vos clients et privilégiez une relation de confiance, basée sur l'écoute, la disponibilité et des conseils individualisés.
- Recevez votre clientèle dans un lieu propre et agréable, conformément aux normes d'hygiène et de sécurité.
- Honorez les commandes en respectant les délais annoncés, grâce à une organisation interne efficace.

La Charte Qualité Performance® – Le management exemplaire :

- Favorisez la transmission du savoir-faire, par la formation et la qualification professionnelle de vos collaborateurs.

- Veillez à la qualité de vos produits, par le respect des exigences réglementaires et légales de votre profession.
- Adoptez des gestes écoresponsables.

La Charte Qualité Excellence® – La dimension environnementale :

- Intégrez des critères environnementaux pour le développement de votre activité.
- Améliorez votre efficacité économique grâce au développement durable.
- Privilégiez en interne l'équité sociale.

Source : Chambre des métiers et de l'artisanat des Hauts de France

Annexe II : Extrait du contrat entre les époux DURANCHON et Magali TRAMIN

ENTRE LES SOUSSIGNÉS

Magali TRAMIN

[...] ci-après le « **Artisan** »

ET

Les époux DURANCHON

[...] ci-après le « **Client** » [...]

IL A ÉTÉ CONVENU CE QUI SUIT : [...]

Article 7

L'artisan s'engage à réaliser les travaux pour lesquels il a été choisi selon le croquis dessiné en amont du contrat et pour lequel le client a donné son accord.

Toutefois, l'artisan se réserve le droit de modifier unilatéralement les caractéristiques du produit à livrer et donc de décider seul des changements à apporter au croquis.

Annexe III : Extrait du contrat liant la SARL « Ambiance et Relaxation » aux artisans membres du club « Artisans Confiance »

ENTRE LES SOUSSIGNÉS :

D'une part

la SARL « Ambiance et Relaxation » [...]

Et d'autre part

l'artisan [...]

Il a été convenu et arrêté ce qui suit :

[...]

Article 4

L'artisan s'engage :

- à respecter la charte qualité octroyée par la Chambre des Métiers et de l'Artisanat des Hauts-de-France ;
- à utiliser exclusivement les matériaux et accessoires vendus par la SARL « Ambiance et Relaxation » ;
- à participer aux petits déjeuners mensuels organisés par la SARL « Ambiance et Relaxation » ;
- à communiquer aux autres membres du club « Artisans Confiance » les coordonnées des clients qu'il ne peut pas satisfaire.

[...]

Article 9

En cas de non-respect des engagements cités à l'article 4, la SARL « Ambiance et Relaxation » s'octroie le droit de résilier unilatéralement ce contrat sans préavis et d'infliger une amende pécuniaire à l'artisan d'un montant de 10 % du chiffre d'affaires réalisé grâce à ce contrat.

CORRIGÉ

Par Pascal Simon-Doutreluingne, professeur en CPGE au lycée René Cassin, à Strasbourg.

Éléments de correction :

La logique de l'exercice « corrigé express » est d'indiquer les éléments succincts mais incontournables du sujet 2020.

Remarques préliminaires :

Les compétences recherchées devaient être :

- une restitution précise des connaissances théoriques ;
- un respect de la forme de la réponse (syllogisme).

Il était donc indispensable d'utiliser la démarche du syllogisme pour répondre aux différentes demandes :

- Réponses justifiées en fait (travail de qualification des faits : compréhension et analyse du contexte en déterminant la pertinence des faits par rapport à la recherche de solution) ;
- Réponses justifiées en droit (connaître et maîtriser son cours pour identifier quelle règle de droit est nécessaire à la solution proposée).

Remarques liminaires :

La formulation du sujet SCBS (ex. **ESC Troyes**) dans un questionnaire classique (deux questions précises puis la résolution d'un cas pratique) avec trois annexes, innovait encore une fois le droit des transports en 2019) en abordant une problématique connexe aux branches du droit étudiées dans le programme : l'appartenance à un club professionnel, sorte de guilde ou de corporation... une association initiée par une entreprise intermédiaire entre clients et artisans maître d'œuvres.

PREMIÈRE PARTIE : ANALYSE DE SITUATION

1^{re} situation

1^{re} question ; identifier et qualifier : un couple de particuliers décide de rénovation dans son logement. Il passe par une entreprise qui après avoir étudié le projet et proposé des solutions, les mets en rapport avec un artisan. La relation donc entre des particuliers et des professionnels (commercial puis artisan) selon l'article liminaire, modifié par la loi n° 2017-203 du 21 février 2017 du code de la consommation.

2^e question ; expliquer : la commission des clauses abusives est compétente pour émettre des avis pas pour trancher un litige. Pour saisir la commission des clauses abusives, il faut saisir un juge, passer par l'intermédiaire d'une association de consommateurs ou la DGCCRF.

Si la clause figure sur l'une des deux listes établies par cette commission et repris aux articles R. 212-1 et R. 212-2 du Code de la consommation, il faut directement saisir le juge.

2^e situation : résolution d'un cas pratique

Les faits et le problème de droit : parce que le couple est fort mécontent de l'artisan, celui-ci est sanctionné par une rupture des relations contractuelles et le retrait du label « club Artisans de confiance » par l'exclusion de ce club. Le problème de droit portait sur une rupture brutale du contrat et l'application de ses caractéristiques pour éviter un abus dans cette rupture. Ainsi l'article L. 442-6-1-5 du Code de commerce prévoit qu'« engage la responsabilité de son auteur et l'oblige à réparer le préjudice causé le fait, par tout producteur, commerçant, industriel ou personne immatriculée au répertoire des métiers [...] de rompre brutalement, même partiellement, une relation commerciale établie, sans préavis écrit tenant compte de la durée de la relation commerciale et respectant la durée minimale de préavis déterminée, en référence aux usages du commerce, par des accords interprofessionnels. »

La solution (proposition) : l'artisan peut être exclu du club si en vertu de l'article 9 du contrat liant les membres de ce club et la SARL intermédiaire, il y a un manquement à son article 4, articles fournis en annexe. *A priori*, le seul reproche fait à cet artisan serait sur le 1^{er} alinéa de ce dernier article : un défaut de qualité dans les travaux réalisés.

Toujours est-il que cet article 9, clauses résolutoire et pénale du contrat, est-il proportionné aux manquements reconnus ?

Ainsi, une telle clause pourrait faire l'objet d'une révision d'office par le juge (article 1231-5, al. 2 du Code civil) si elle est excessive voire être déclarée abusive car elle n'envisage pas de mise en demeure et elle ne porte pas sur une situation suffisamment grave (articles 1224 à 1230 du code civil).

DEUXIÈME PARTIE : VEILLE JURIDIQUE

La question portait sur la protection du consommateur, donc un champ d'analyse plus restreint que les sujets des autres écoles conceptrices. Cependant, le libellé indiquait bien qu'il fallait quatre exemples qui devaient être explicités et permettre une argumentation.

L'évolution des obligations des professionnels [en matière d'information] a-t-elle des conséquences sur la protection des consommateurs ?

La solution (façon « plan B ») pouvait être une bivalence « non, cela ne change pas » / « oui cela évolue » et de ne pas être plus précis, alors que les trois éléments (production, utilisation et diffusion de l'information) pouvait apporter une réflexion plus subtile : à quel niveau du cadre juridique, il y a des évolutions notables qui puissent faire évoluer la protection du consommateur qui est un principe important du Droit de la consommation ?

Ainsi, la jurisprudence de la cour de cassation dans l'affaire dite des « crédits en francs suisses » fut largement commentée : *a contrario* des analyses plus ou moins prédictives, elle ne sanctionna pas la Banque BNP qui avait tout à fait correspondu à son devoir d'information précontractuelle.

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

BSB

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Sujet

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
 - Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A . En déduire les valeurs propres possibles de A .
 - Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A . A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
 - Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$.
- Exprimer B en fonction de I_2 et A . Exprimer de même D en fonction de I_2 et C .
 - En déduire que $P^{-1}BP = D$.
- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
 - Pour tout entier naturel n , donner les coefficients de D^n .
 - Déduire de 3.a) et 3.b) que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.
- Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le n -ème échange » et B_n l'événement « Béatrice gagne le n -ème échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.

- Donner les valeurs de a_1 et b_1 . Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$.
- On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
- Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$.
- Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
- Déduire de 3.c) que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$.

Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

5. Simulation informatique.

On rappelle que l'instruction `a=grand(1,1,'bin',1,p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p . Ainsi si $p = \frac{2}{3}$ l'instruction `a=grand(1,1,'bin',1,2/3)` affecte à la variable a la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On utilise cette instruction pour simuler une partie de 20 échanges entre Antoine et Béatrice.

- Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable a corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).
- Recopier et compléter les lignes 2 et 7 afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```

1. a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
2. S=...
3. for i=2:20
4.     if a=1 then a=grand(.....)
5.         else a=grand(.....)
6.     end
7.     S=...
8. end
9. disp(S)

```

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

- Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$.
 - Calculer $g(1)$.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
 - Dresser le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions 1.b) et 1.c).

- e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}$.
- a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}$.
- b) Dédire de 1.c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de la limite de f en $+\infty$.
- c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question 2.b) ainsi que $f(1)$.
3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.
- a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation :
 $x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$.
- On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.
- b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.
- c) On donne : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h .
- d) Dédire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α .
4. Tracer l'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 4 cm.

Exercice 3

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

1. Dans cette question, on suppose que l'on connaît la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\frac{2}{100}$.

L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaîne durant cette période.

- a) Reconnaître la loi de X . On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.
- b) Calculer l'espérance et la variance de X .

La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne peut plus afficher la valeur 0. En revanche il affiche normalement tous les autres nombres y compris 10, 20, etc. Lorsque X est égale à 0 il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X . Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.

- c) On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'bin',n,p)` simule une loi binomiale de paramètres (n, p) et que l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` simule une loi uniforme sur $[1, n]$. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y .

```

1. X=grand(1,1,...)
2. if X==0 then Y=...
3.     else Y=...
4. end
5. disp(X), disp(Y)

```

2. Dans cette question, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer. Pour cela on fait tester par la machine n cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la i -ème cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

$$\text{On note } M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Rappeler, pour i compris entre 1 et n , l'espérance et la variance de X_i .
- Calculer $E(M_n)$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais de p .
- Calculer $V(M_n)$. Montrer que le risque quadratique de l'estimateur M_n est égal à $\frac{p(1-p)}{n}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. On admet que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que : $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
- Soit $\alpha \in]0; 1[$. Montrer que si $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$ alors $[M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

- Vérifier que pour tout réel t appartenant à $[0; 1]$ on a : $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.
 - En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
 - Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
 - En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3 .

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = k \frac{t}{1+t} \quad \text{si } t \in [0; 1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

- En utilisant l'un des calculs de la question 1 déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité. Vérifier que pour cette valeur de k la fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on suppose que k est la valeur trouvée à la question 2 et que X est une variable aléatoire ayant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

- Calculer $F(x)$ lorsque $x < 0$ et lorsque $x > 1$.
 - Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$ on a : $F(x) = k(x - \ln(1+x))$.
- En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}$$

- En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une variance et calculer $V(X)$. On ne demande pas de simplifier l'expression de $V(X)$.

Par Bernard Delacampagne, professeur en CPGE au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1.a. Rappelons que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que,

dans ce cas, sa matrice inverse est $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ici, pour la matrice P, on a :

$$ad - bc = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$$

Puisque $ad - bc \neq 0$, **P est inversible** et l'application du rappel donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. On a :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

Ce résultat peut encore s'écrire, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 2 :

$$A^2 - 2A = 0$$

Ceci assure que le **polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A**.

Les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme annulateur $X^2 - 2X$, et on a :

$$X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X(X - 2) = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = 2)$$

Donc les **valeurs propres possibles de A sont 0 et 2**.

c. On a :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0V$$

Puisque $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **U et V sont des vecteurs propres de A associés**

respectivement aux valeurs propres 2 et 0.

d. D'après les deux questions précédentes, les valeurs propre de A sont 0 et 2 ; P est la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans cet ordre les vecteurs propres U et V de A, et D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont dans cet ordre les valeurs propres associées à U et V, donc A est diagonalisable et on a l'égalité :

$$P^{-1}AP = C$$

2.a. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2 \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C + I_2$$

b. Il vient, d'après la question précédente et la question 1.c :

$$P^{-1}BP = P^{-1}(A + I_2)P = P^{-1}AP + P^{-1}I_2P = C + P^{-1}P = C + I_2 = D$$

3.a. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n, par :

$$P^{-1}B^nP = D^n$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 = D^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$P^{-1}B^nP = D^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$P^{-1}B^{n+1}P = D^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.b :

$$D^{n+1} = D^n D = P^{-1}B^n P P^{-1} B P = P^{-1} B^n I_2 B P = P^{-1} B^n B P = P^{-1} B^{n+1} P$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$P^{-1}AB^nP = D^n$$

b.a. D étant une matrice diagonale, D^n s'obtient en élevant à la puissance n les termes de la diagonale de D ; il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. D'après la question 3.a, on a, pour tout entier naturel n , l'équivalence :

$$P^{-1}B^nP = D^n \Leftrightarrow B^n = PD^nP^{-1}$$

En utilisant la question 3.b, il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$B^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

4.a. Antoine sert en premier et le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$, donc on a :

$$a_1 = P(A_1) = \frac{2}{3}$$

Puis, le joueur qui a le service le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$, on a :

$$b_1 = P(B_1) = \frac{1}{3}$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_1, B_1\}$, il vient :

$$a_2 = P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

b. On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. La probabilité qu'il ait emporté le premier échange est :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)P_{A_1}(A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$$

c. En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_n, B_n\}$, il vient bien, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \cdot \frac{2}{3} + b_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$$

On obtient de la même manière, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) = a_n \cdot \frac{1}{3} + b_n \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$$

d. Pour tout entier $n \geq 1$, on a, d'après la question précédente :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} B X_n$$

e. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$$

Initialisation :

P_1 est vraie car on a :

$$\frac{1}{3^{1-1}} B^{1-1} X_1 = \frac{1}{3^0} B^0 X_1 = I_2 X_1 = X_1$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3^n} B^n X_1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} B X_n = \frac{1}{3} B \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^n} B B^{n-1} X_1 = \frac{1}{3^n} B^n X_1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier $n \geq 1$** , on a :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1$$

f. D'après la question précédente et les questions 3.c et 4.a, on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 1 & 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 & 3^{n-1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 3^n} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 1 & 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 & 3^{n-1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \times 3^n} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} + 2 + 3^{n-1} - 1 \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 2 + 3^{n-1} + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 3^n} \begin{pmatrix} 3^n + 1 \\ 3^n - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n}$$

5. Simulation informatique.

a. Les lignes 4 et 5 sont complétées de telle sorte que lors des 20 échanges de la partie la variable a corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0) de la façon suivante :

4.	if a==1 then a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
5.	else a=grand(1,1,'bin',1,1/3)

b. Les lignes 2 et 7 du programme sont complétées de telle sorte afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie de la façon suivante :

2.	S=0
7.	S=S+a

Exercice 2

1.a. La dérivée de g vérifie pour tout $x > 0$ l'égalité :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

b. On a :

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1$$

c. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(x)) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

On a, en factorisant par x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ (par croissance comparée)}$$

d. Puisque $x > 0$ sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Compte-tenu des questions b et c, le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$ est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
g'		- 0 +	
g	$+\infty$	1	$+\infty$

e. D'après le tableau des variations de g , g présente en 1 un minimum de valeur 1, donc on a, pour tout réel x strictement positif :

$$g(x) > 0$$

2.a. On a, pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{\frac{x-1}{x}}{(x-\ln(x))^2} = -\frac{x-1}{x(x-\ln(x))^2} = \frac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}$$

b. Il résulte de la question 1.c que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

c. Puisque $x(x - \ln(x))^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$ avec les limites obtenues à la question 2.b. ainsi que $f(1)$ est le suivant :

x	0	1	$+\infty$	
f'		+	0	-
f			1	
	0		0	

3.a. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x - \ln(x)} = x \Leftrightarrow x - \ln(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$$

Donc l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$ sur $]0, +\infty[$.

b. On a, pour tout réel $x > 0$:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, $h'(x)$ est du signe de $x^2 - x + 1$ sur $]0, +\infty[$; le discriminant du polynôme $x^2 - x + 1$ est :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

On a donc, pour tout réel $x > 0$:

$$h'(x) > 0$$

Donc h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c. Compte-tenu des limites données et de la question précédente, le tableau des variations de h est le suivant :

x	0	$+\infty$
h'		+
h		$+\infty$
	$-\infty$	

d. D'après la question 3.a, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

h est continue (comme différence de fonctions continues) sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'après la question 3.b., donc h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$; puisque 0 appartient à $h(]0, +\infty[)$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

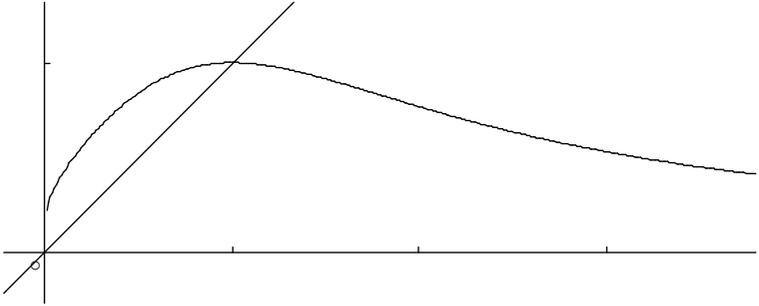
On a :

$$f(1) = 1$$

Par unicité de α , il vient :

$$\alpha = 1$$

4. L'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 4 cm sont les suivantes :



Exercice 3

1.a. X compte le nombre de succès de l'évènement « une cartouche est défectueuse », de probabilité $p = \frac{2}{100}$, au cours de $n = 100$ tests de cartouches identiques et indépendants, donc

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 100, p = \frac{2}{100}\right)$.

D'après le cours, il vient :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket = \llbracket 0, 100 \rrbracket$$

Et, pour tout entier k de $X(\Omega)$:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{100}{k} \left(\frac{2}{100}\right)^k \left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}$$

b. D'après les formules du cours, l'espérance et la variance de X sont respectivement :

$$E(X) = np = 100 \cdot \frac{2}{100} = 2 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 2 \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 2 \cdot \frac{98}{100} = \frac{49}{25}$$

c. Le programme suivant a été complété afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y :

1.	<code>X=grand(1,1,'bin',100,2/100)</code>
2.	<code>if X==0 then Y=grand(1,1,'uin',1,100)</code>
3.	<code> else Y=X</code>
4.	<code>end</code>
5.	<code>disp(X),disp(Y)</code>

2.a. Chaque cartouche ayant la probabilité p d'être défectueuse, X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ pour tout entier i compris entre 1 et n ; d'après le cours, l'espérance et la variance de X_i sont respectivement :

$$E(X_i) = p \quad \text{et} \quad V(X_i) = p(1-p)$$

b. Par définition de $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = \frac{1}{n} (np) = p$$

Puisque $E(M_n) = p$, M_n est un estimateur sans biais de p .

c. Par propriété de la variance et par indépendance des variables X_i , il vient :

$$V(\mathbf{M}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Puisque M_n est un estimateur sans biais de p , le risque quadratique de M_n est :

$$r(\mathbf{M}_n) = V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$$

d. ε un réel strictement positif, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à la variable aléatoire M_n , donne :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Soit encore, d'après les questions 2.b. et 2.c. :

$$P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

L'énoncé ayant fait admettre que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, il en résulte que :

$$P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

e. Par définition, $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1 - \alpha$ si $P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$.

On a :

$$P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq M_n - p \leq \varepsilon) = P(|M_n - p| \leq \varepsilon) = 1 - P(|M_n - p| > \varepsilon)$$

D'après la question précédente et puisque $(|M_n - p| > \varepsilon) \subset (|M_n - p| \geq \varepsilon)$, on a :

$$P(|M_n - p| > \varepsilon) \leq P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Il vient donc :

$$P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$, on obtient :

$$P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n \frac{1}{4n\alpha}} = 1 - \alpha$$

Ainsi, si $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$, alors $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 4

1.a. Pour tout réel t appartenant à $[0,1]$, on a, en réduisant au même dénominateur :

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

Ainsi a-t-on vérifié que, **pour tout réel t appartenant à $[0,1]$** :

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

b. Par définition de I_n et d'après la question précédente, il vient :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

c. Par définition de I_n et par linéarité de l'intégrale, il vient, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^n(t+1)}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

d. En donnant à n la valeur 1 dans l'égalité de la question précédente, il vient :

$$I_2 + I_1 = \frac{1}{2}$$

On a donc, compte-tenu de la question 1.b :

$$I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - (1 - \ln(2)) = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

En donnant à n la valeur 2 dans l'égalité de la question précédente, il vient :

$$I_3 + I_2 = \frac{1}{3}$$

On a donc, compte-tenu de la valeur de I_2 :

$$I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{5}{6} - \ln(2)$$

2. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} 0 dt = \int_0^1 f(t) dt$$

Il vient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 k \frac{t}{1+t} dt = 1 \Leftrightarrow k \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = 1 \Leftrightarrow k I_1 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{I_1}$$

Donc, d'après la question 1.b, **la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité est $k = \frac{1}{1 - \ln(2)}$** .

Reste à vérifier que pour cette valeur de k , f est bien une densité de probabilité.

f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction nulle, et sur $[0,1]$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul ; de plus f , étant continue sur $[0,1]$, admet des limites finies en 0^+ et 1^- ; elle a également des limites finies en 0^- et 1^+ car :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 0 = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

Donc f est continue par morceaux sur \mathbb{R} , avec un nombre fini (un) de points de discontinuité.

Pour tout réel t appartenant à $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, on a :

$$f(t) = 0 \geq 0$$

Pour tout réel t appartenant à $[0,1]$, on a, puisque $k = \frac{1}{1 - \ln(2)}$ est un réel positif :

$$f(t) = k \frac{t}{1+t} \geq 0$$

Donc f est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

Ainsi, **pour la valeur $k = \frac{1}{1 - \ln(2)}$, f est bien une densité de probabilité.**

3.a. On sait que, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On a donc, **lorsque $x < 0$** :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Et, **lorsque $x > 1$** :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

b. Pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x k \frac{t}{1+t} dt = k \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

Il vient donc, d'après la question 1.a, **pour tout réel $x \in [0,1]$** :

$$F(x) = k \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = k \left[t - \ln(1+t) \right]_0^x = k(x - \ln(1+x))$$

4.a. Sous réserve d'existence, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, $\int_{-\infty}^0 tf(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} tf(t) dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^0 tf(t) dt = \int_1^{+\infty} tf(t) dt = 0$$

Donc **X admet une espérance** et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^1 tf(t) dt + \int_1^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^1 tf(t) dt$$

On a ensuite, par définition de f :

$$E(X) = \int_0^1 tf(t) dt = \int_0^1 k \frac{t^2}{1+t} dt = k \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = kI_2$$

Il vient alors, en utilisant la question 1.d :

$$E(X) = \frac{1}{1 - \ln(2)} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}$$

b. Sous réserve d'existence, l'espérance de X^2 est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, $\int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = 0$$

Donc X^2 admet une espérance et on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt + \int_0^1 t^2 f(t) dt + \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^1 t^2 f(t) dt$$

On a ensuite, par définition de f :

$$E(X^2) = \int_0^1 t^2 f(t) dt = \int_0^1 k \frac{t^3}{1+t} dt = k \int_0^1 \frac{t^3}{1+t} dt = kI_3$$

Il vient alors, en utilisant la question 1.d :

$$E(X^2) = \frac{1}{1-\ln(2)} \left(\frac{5}{6} - \ln(2) \right) = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1-\ln(2)}$$

Puisque X^2 admet une espérance, X admet une variance, et on a, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\frac{5}{6} - \ln(2)}{1-\ln(2)} - \left(\frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1-\ln(2)} \right)^2$$

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

On rappelle que :

- la probabilité d'un événement B est notée $P(B)$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(B)$ la probabilité conditionnelle de B sachant C ;
- l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z .

ESCP
BS

S U J E T

Exercice 1

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I .
- b) En déduire que A est inversible, puis exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et de A^2 .
- c) Écrire une instruction `Scilab` permettant de saisir la matrice A .
- d) En utilisant la question 1b), proposer une instruction `Scilab` qui permet de calculer A^{-1} .
- e) Donner une instruction `Scilab`, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1} .

- 2) On rappelle que, par convention, $A^0 = I$. Justifier que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$, puis compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de saisir A , puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
A=[---;---;---]
B=A^2
for k=3:n
    C=3*B+(9/4)*I
    I=---
    A=---
    B=---
end
disp(B)
```

- 3) On admet que la matrice A possède au moins une valeur propre.

a) Montrer que, si λ est une valeur propre de A , alors on a : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$.

- b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$$

- c) En déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0 , et la placer entre deux entiers consécutifs.

- 4) On souhaite démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que A n'est pas diagonalisable. On suppose donc que A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

a) Montrer que $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = 0$, puis en déduire la matrice D .

- b) Conclure.

Exercice 2

On effectue une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face".

- 1) Donner la loi commune à X et Y , ainsi que les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X .

- 2) Que vaut $P([X=1] \cap [Y=1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

3) a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.

- c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire XY . On précisera $(XY)(\Omega)$.

- d) Montrer que l'espérance de XY existe, puis donner sa valeur.

- e) Calculer la covariance de X et Y . En déduire que la variance de $X+Y$ est égale à 2.

- 4) a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$. On précisera $(X + Y)(\Omega)$.
b) Montrer que les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont de même loi.

5) On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
x=---
y=---
lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
if lancer==1 then
    while lancer==1
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        y=---
        end
    else
        while lancer==0
            lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
            x=---
        end
    end
disp(x)
disp(y)
```

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

- 1) a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1, x]$, puis montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$.

- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Justifier l'existence, sur $[1, +\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x}{x}$.

- d) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.

- e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$.

- 2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

- b) En déduire l'encadrement : $0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$.

c) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x$$

3) a) Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

b) À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt$$

4) a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3, +\infty[$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$.

Exercice 4

Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes des questions 1, 2 et 3.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante :

s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n .

On a donc $A_0 = 0$.

On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O .

Voici deux exemples :

- Si les abscisses successives du mobile après son départ sont $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 1, A_4 = 2, A_5 = 0, A_6 = 0$, alors l'événement ($U = 1$) est réalisé.
- Si les abscisses successives du mobile après son départ sont $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 0, A_5 = 0, A_6 = 1$, alors l'événement ($U = 4$) est réalisé.

1) a) Justifier que, pour tout i de \mathbb{N}^* , on a :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \text{ et } P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

b) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'événement ($U = k$) en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables aléatoires A_i .

c) Sans chercher à trouver la loi des variables aléatoires A_1, \dots, A_k , déduire des questions précédentes que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(U = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

d) Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1$.

e) En déduire la valeur de $P(U = 0)$.

2) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $P(U > n) = \frac{1}{n+1}$.

3) On rappelle que, si j est un entier naturel non nul, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,j)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 1 et j .

Compléter les commandes du script Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
k=1
hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
while hasard -----
k=k+1
hasard= -----
end
disp(k, ' U a pris la valeur :')
```

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire T qui admet f pour densité.

b) Montrer que la fonction de répartition de T est la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5) On appelle partie entière du réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x .

On a ainsi : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par exemple, si $x = 4.7$, alors $\lfloor x \rfloor = 4$, et si $x = 6$, alors $\lfloor x \rfloor = 6$.

On pose $N = \lfloor T \rfloor + 1$ et on admet que N est une variable aléatoire.

a) Montrer que N prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* , puis justifier que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$P(N = n) = P(n-1 \leq T < n)$$

b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

c) Expliquer pourquoi le script Scilab de la question 3) donne une simulation de N .

6) a) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

b) La variable aléatoire N possède-t-elle une espérance ?

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur en CPGE au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Les calculs donnent :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}I$$

Donc $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I .

b. On a, d'après la question précédente :

$$A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4}I \Leftrightarrow A(A^2 - 3A) = \frac{9}{4}I \Leftrightarrow A\left(\frac{4}{9}(A^2 - 3A)\right) = I$$

Ceci prouve que A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{4}{9}(A^2 - 3A)$$

c. Une instruction Scilab permettant de saisir la matrice A est :

$$A=[1,2,1;1/2,1,2;1,1/2,1]$$

d. D'après la question 1.b, une instruction Scilab qui permet de calculer A^{-1} est :

$$4/9*(A^2-3*A)$$

e. Une instruction Scilab, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1} est :

$$\text{inv}(A)$$

2. Le résultat obtenu à la question 1.a peut s'écrire :

$$A^3 = 3A^2 + \frac{9}{4}I$$

Il vient donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$A^n = A^{n-3}A^3 = A^{n-3}\left(3A^2 + \frac{9}{4}I\right) = 3A^{n-3}A^2 + \frac{9}{4}A^{n-3}I = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$$

Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il permette de saisir A , puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur :

$$\begin{array}{l} n=\text{input}(\text{'entrez une valeur pour n:'}) \\ I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1] \\ A=[1,2,1;1/2,1,2;1,1/2,1] \end{array}$$

```

B=A^2
for k=3:n
    C=3*B+(9/4)*I
    I=A
    A=A*I
    B=C
end
disp(B)
    
```

3.a. Le résultat obtenu à la question 1.a peut s'écrire :

$$A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I = 0$$

Donc le polynôme $X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4}$ est un polynôme annulateur de A ; toute valeur propre de A étant racine d'un polynôme annulateur de A, on a donc, si λ est une valeur propre de :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$$

b. On a, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré, du signe de 3 à l'extérieur des racines 0 et 2.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Donc le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	0	- 0	+
f	$-\infty$	$\nearrow -\frac{9}{4}$	$\searrow -\frac{25}{4}$	$\nearrow +\infty$

c. On a admis que la matrice A possède au moins une valeur propre λ , et d'après la question 3.a., λ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

D'après le tableau de variations de f, f admet un maximum de valeur $-\frac{9}{4}$ sur $]-\infty, 2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, 2]$.

f est continue (comme fonction polynôme) et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-\frac{25}{4}, +\infty[$; puisque 0

appartient à l'intervalle $[-\frac{25}{4}, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, notée λ_0 , dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

Donc A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0 .

On a :

$$f(3) = -\frac{9}{4} < f(\lambda_0) = 0 < f(4) = \frac{55}{4}$$

Puisque f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$, il vient l'encadrement de λ_0 entre deux entiers consécutifs :

$$3 < \lambda_0 < 4$$

4.a. Puisque $D = P^{-1}AP$, on a :

$$D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = (P^{-1}AP)^3 - 3(P^{-1}AP)^2 - \frac{9}{4}I = P^{-1}A^3P - 3P^{-1}A^2P - \frac{9}{4}I$$

Il en résulte, d'après la question 1.a, que :

$$D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = P^{-1} \left(A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I \right) P = P^{-1}0P = 0$$

puis en déduire la matrice D .

D est une matrice diagonale d'ordre 3, donc de la forme $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; on a alors :

$$D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = \begin{pmatrix} a^3 - 3a^2 - \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & b^3 - 3b^2 - \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & c^3 - 3c^2 - \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - \frac{9}{4} = b^3 - 3b^2 - \frac{9}{4} = c^3 - 3c^2 - \frac{9}{4} = 0$$

Puis, d'après la question 3.c :

$$a = b = c = \lambda_0$$

On a donc :

$$D = \lambda_0 I$$

b. On a :

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Puisque d'après la question précédente $D = \lambda_0 I$, il vient :

$$A = P\lambda_0 I P^{-1} = \lambda_0 P I P^{-1} = \lambda_0 I$$

Ce résultat étant absurde, on peut conclure que **A n'est pas diagonalisable.**

EXERCICE 2

1. X (resp. Y) représente le temps d'attente d'un premier « pile » (resp. « face »), au cours de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » (resp. « face ») vaut $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{2}$), donc **X et Y suivent la loi**

géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

D'après le cours, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X sont :

$$E(X) = \frac{1}{p} = 2 \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

2. Puisqu'un « pile » et un « face » ne peuvent apparaître au premier lancer, on a :

$$P([X=1] \cap [Y=1]) = 0$$

Or on a :

$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$P([X=1] \cap [Y=1]) \neq P(X=1)P(Y=1)$$

Ceci prouve que X et Y ne sont pas indépendantes.

3.a. Pour tout j supérieur ou égal à 2, l'événement $(Y = j)$ est réalisé si on a obtenu un « face » au j -ème lancer et des « pile » aux lancers précédents, et donc un « pile » au premier lancer ; on a donc :

$$(Y = j) \subset (X = 1)$$

Il en résulte que, pour tout j supérieur ou égal à 2, on a :

$$[X=1] \cap [Y=j] = [Y=j]$$

Puis, pour tout j supérieur ou égal à 2 :

$$P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$$

b. De même qu'à la question précédente, pour tout i supérieur ou égal à 2, l'événement $(X = i)$ est réalisé si on a obtenu un « pile » au i -ème lancer et des « face » aux lancers précédents, et donc un « face » au premier lancer ; on a donc :

$$(X = i) \subset (Y = 1)$$

Il en résulte que, pour tout i supérieur ou égal à 2, on a :

$$[X=i] \cap [Y=1] = [X=i]$$

Puis, pour tout i supérieur ou égal à 2 :

$$P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$$

c. Rappelons que X et Y suivent une loi géométrique, donc on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Notons que nécessairement $X=1$ ou $Y=1$ puisque le premier lancer donne nécessairement « pile » ou « face ».

Si $X=1$ (resp. $Y=1$), Y (resp. X) prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, donc on a :

$$(XY)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

Et la loi de probabilité de XY est donnée, d'après les questions 3.a et 3.b, pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, par :

$$P([XY = k]) = P([X=1] \cap [Y=k]) + P([X=k] \cap [Y=1]) = P(Y=k) + P(X=k)$$

Puisque X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$, il vient, pour tout

entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$P([XY = k]) = 2P(X = k) = 2p(1-p)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

d. Puisque $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, sous réserve de convergence, l'espérance de XY est définie par :

$$E(XY) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(XY = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

On sait que la série $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$; elle converge car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et sa somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} = 4$$

Il en résulte que l'espérance de XY existe, et a pour valeur :

$$E(XY) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4 - 1 = 3$$

e. La covariance de X et Y se calcule en utilisant la formule de Koenig-Huygens :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On sait d'après la question précédente et la question 1 que :

$$E(XY) = 3 \text{ et } E(X) = E(Y) = 2$$

Il vient donc :

$$\text{cov}(X, Y) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

La variance de $X + Y$ se calcule par la formule :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

On sait d'après ce qui précède et la question 1 que :

$$\text{cov}(X, Y) = -1 \text{ et } V(X) = V(Y) = 2$$

Il vient donc :

$$V(X + Y) = 2 + 2 + 2 \cdot (-1) = 2$$

4.a. Rappelons que X et Y suivent une loi géométrique, donc on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Notons que nécessairement $X = 1$ ou $Y = 1$ puisque le premier lancer donne nécessairement « pile » ou « face ».

Si $X = 1$ (resp. $Y = 1$), Y (resp. X) prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, donc on a :

$$(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$$

Et la loi de probabilité de $X + Y$ est donnée, d'après les questions 3.a et 3.b, pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, par :

$$P([X + Y = k]) = P([X = 1] \cap [Y = k - 1]) + P([X = k - 1] \cap [Y = 1])$$

$$= P(Y = k - 1) + P(X = k - 1)$$

Puisque X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$, il vient, **pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$** :

$$P([X + Y = k - 1]) = 2P(X = k - 1) = 2p(1 - p)^{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

b. La loi de XY a été obtenue à la question 3.c ; on sait que $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et que pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$P([XY = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Il en résulte que :

$$(XY + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\} = (X + Y)(\Omega)$$

Et que pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, on a :

$$P([XY + 1 = k]) = P([XY = k - 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = P([X + Y = k])$$

Donc les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont de même loi.

5. Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice ; à noter qu'il manquait un end de fin de la seconde boucle while dans l'énoncé...

```
x=1
y=1
lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
if lancer==1 then
    while lancer==1
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        y=y+1
    end
else
    while lancer==0
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        x=x+1
    end
end
disp(x)
disp(y)
```

EXERCICE 3

1.a. x étant un réel supérieur ou égal à 1, on a, pour tout réel t de $[1, x]$:

$$1 \leq t \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

Donc $\frac{1}{t}$ est minoré par $\frac{1}{x}$ pour tout réel t de $[1, x]$.

D'après ce qui précède et puisque $e^t > 0$, on a, pour tout réel t de $[1, x]$:

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$$

Par intégrations d'inégalités sur l'intervalle $[1, x]$, il vient :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e^t}{x} dt = \left[\frac{e^t}{x} \right]_1^x = \frac{e^x}{x} - \frac{e}{x} = \frac{e^x - e}{x}$$

Ainsi a-t-on montré que, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, on a :

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$$

b. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (par croissance comparée) et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$$

D'après l'inégalité de la question précédente et par un théorème de comparaison de limites, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c. f est la primitive sur $[1, +\infty[$ s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$, donc f est dérivable sur $[1, +\infty[$, et on a, pour tout réel x de $[1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}$$

d. On a, pour tout réel x de $[1, +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$, $e^x > 0$ et $x-1 \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, on a, pour tout réel x de $[1, +\infty[$:

$$f''(x) \geq 0$$

Donc la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.

e. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) + 0 = ex - e$$

2.a. On a, pour tout réel t de $[1, +\infty[$:

$$g'(t) = \frac{t^3 e^t - 3t^2 e^t}{(t^3)^2} = \frac{t^2(t-3)e^t}{t^6} = \frac{(t-3)e^t}{t^4}$$

Puisque $e^t > 0$ et $t^4 > 0$ sur $[1, +\infty[$, $g'(t)$ est du signe de $t-3$ sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$t-3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$$

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty \text{ (par croissance comparée)}$$

Donc le tableau de variation de la fonction g est le suivant :

x	1	3	$+\infty$
g'	-	0	+
g	e	$\frac{e^3}{27}$	$+\infty$

b. D'après le tableau de variations de g, on a, pour tout réel t de $[1, 3]$:

$$0 \leq g(t) \leq e$$

Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur $[1, 3]$, on a :

$$\int_1^3 g(t) dt \geq 0$$

Par utilisation d'une inégalité de la moyenne sur $[1, 3]$, on a :

$$\int_1^3 g(t) dt \leq (3-1)e$$

Ainsi a-t-on, l'encadrement :

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$$

c. Pour tout réel x supérieur ou égal à 3, toujours par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur $[3, x]$, on a :

$$\int_3^x g(t) dt \geq 0$$

Puisque g est croissante sur $[3, +\infty[$, on a, pour tout réel x supérieur ou égal à 3 :

$$g(t) = \frac{e^t}{t^3} \leq g(x) = \frac{e^x}{x^3}$$

Par utilisation d'une inégalité de la moyenne sur $[3, x]$, on a :

$$\int_3^x g(t) dt \leq (x-3) \frac{e^x}{x^3} = \frac{x-3}{x^3} e^x$$

Ainsi a-t-on, l'encadrement, **pour tout réel x supérieur ou égal à 3** :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x$$

3.a. Pour tout réel x de $[1, +\infty[$, calculons $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{t} & u'(t) &= -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) &= e^t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[1, +\infty[$, il vient, par intégration par parties, les fonctions u, v, u' et v'

étant continues sur $[1, x]$:

$$f(x) = \left[\frac{e^t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} \right) e^t dt = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

b. Reprenons l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente pour tout réel x de $[1, +\infty[$, à savoir :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

Calculons $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$ à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{t^2} = t^{-2} & u'(t) &= -2t^{-3} = -\frac{2}{t^3} \\ v'(t) &= e^t & v(t) &= e^t \end{aligned}$$

Il vient, par intégration par parties, les fonctions u , v , u' et v' étant continues sur $[1, x]$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \left[\frac{e^t}{t^2} \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{2}{t^3} \right) e^t dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt$$

Il en résulte que l'on a, **pour tout réel x de $[1, +\infty[$** :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x} - e + \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt$$

4.a. D'après la question 1.a, on a, pour tout x de $[1, +\infty[$, et donc pour tout x de $[3, +\infty[$:

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$$

D'après la question 3.b, on a, pour tout x de $[1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt$$

Il vient donc, en utilisant la relation de Chasles, pour tout réel x de $[1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^3 g(t) dt + 2 \int_3^x g(t) dt$$

Compte-tenu des questions 2.b et 2.c, il en résulte qu'on a, pour tout réel x de $[3, +\infty[$:

$$f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2(2e) + 2 \frac{x-3}{x^3} e^x$$

Un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout x de $[3, +\infty[$ est donc :

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2e + 2 \frac{x-3}{x^3} e^x$$

b. Puisque $xe^{-x} > 0$ sur $[3, +\infty[$, on obtient, en multipliant l'encadrement précédent par xe^{-x} et en simplifiant :

$$1 - e^{-x} \leq xf(x)e^{-x} \leq 1 + \frac{1}{x} + 2xe^{-x} + 2 \frac{x-3}{x^2}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + 2e^{-x} + 2\frac{x-3}{x^2} \right) = 1$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 0$$

Il résulte de l'encadrement précédent et du théorème d'encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$$

EXERCICE 4

1.a. Pour tout i de \mathbb{N}^* , si le mobile est au point d'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$, alors, par hypothèse, en prenant $k=i$, à l'instant $(i-1)+1=i$, il sera sur le point d'abscisse i avec la probabilité $\frac{i}{i+1}$, et si le mobile est au point d'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$, alors, par hypothèse, à l'instant $(i-1)+1=i$, il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{i+1}$, donc :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \text{ et } P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

b. Pour tout k de \mathbb{N}^* , l'événement $(U = k)$ est réalisé si et seulement si le mobile n'est pas au point d'abscisse 0 à tous les instants compris entre 1 et $k-1$ et à l'instant k au point d'abscisse 0 , donc on a, **pour tout k de \mathbb{N}^*** :

$$(U = k) = (A_0 = 0) \cap (A_1 = 1) \cap (A_{k-1} = k-1) \cap (A_k = 0)$$

c. D'après la formule des probabilités composées, on a, pour tout k de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= P((A_0 = 0) \cap (A_1 = 1) \cap \dots \cap (A_{k-1} = k-1) \cap (A_k = 0)) \\ &= P(A_0 = 0) P_{(A_0=0)}(A_1 = 1) \dots P_{(A_0=0) \cap (A_1=1) \cap \dots \cap (A_{k-2}=k-2)}(A_{k-1} = k-1) \\ &\quad \times P_{(A_0=0) \cap (A_1=1) \cap \dots \cap (A_{k-1}=k-1)}(A_k = 0) \\ &= P(A_0 = 0) P_{(A_0=0)}(A_1 = 1) \dots P_{(A_{k-2}=k-2)}(A_{k-1} = k-1) P_{(A_{k-1}=k-1)}(A_k = 0) \end{aligned}$$

On trouve donc, en utilisant la question 1.a :

$$P(U = k) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k}$$

Ce produit est un produit télescopique, après simplification par $2, 3, \dots, k-1$, il reste, **pour tout k de \mathbb{N}^*** :

$$P(U = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

d. Pour tout entier naturel non nul k , on obtient, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Pour tout entier naturel non nul n , on a, d'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^n P(U = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Cette somme est une somme télescopique ; après simplification par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, il reste :

$$\sum_{k=1}^n P(U = k) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(U = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Ceci prouve que la série $\sum_{k \geq 1} P(U = k)$ converge et que sa somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1$$

e. Il a été admis que U est une variable aléatoire, et puisque $U(\Omega) = \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(U = k) = 1$$

Il en résulte, d'après la question précédente que :

$$P(U = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1 - 1 = 0$$

2. Puisque $P(U = 0) = 0$, et d'après un calcul de la question 1.d, il vient, **pour tout n de \mathbb{N}^*** :

$$P(U > n) = 1 - P(U \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^n P(U = k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

3. Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée :

```
k=1
hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
while hasard > 1
    k=k+1
    hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
end
disp(k,'U a pris la valeur:')
```

4.a. f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0, +\infty[$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul.

f , étant continue sur $[0, +\infty[$, admet une limite finie à droite en 0 ; f admet aussi une limite finie à gauche en 0, car :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

Donc f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
 f est positive sur \mathbb{R} car :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} > 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \geq 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0$$

On a, pour tout réel A positif ou nul :

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^A \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^A = 1 - \frac{1}{A+1}$$

Il vient donc :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A+1} \right) = 1$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité.**

b. On a, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Il en résulte que, si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Tandis que si $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^x = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

En résumé, la fonction de répartition **F** de **T** est bien donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5.a. Puisque T prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$, $\lfloor T \rfloor$ prend ses valeurs dans \mathbb{N} ; puisque $N = \lfloor T \rfloor + 1$, **N prend ses valeurs dans \mathbb{N}^*** et on a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$P(N = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n - 1) = P(n - 1 \leq T < n)$$

b. On a donc, d'après les deux questions précédentes, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(n-1 \leq T < n) = F(n) - F(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

c. D'après les questions 1.c et 5.b, on constate que U et N suivent la même loi, donc le script Scilab de la question 3 donne une simulation de N.

6.a. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 et tout réel t de $[k, k+1]$, on a :

$$k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En utilisant une inégalité de la moyenne, on a :

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq (k+1-k) \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

On a bien, pour tout k entier supérieur ou égal à 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

b. D'après les questions 5.a et 5.b, sous réserve de convergence, l'espérance de N est définie par :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

On a, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_2^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 2$$

Ainsi a-t-on, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) - \ln 2$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(n+1) - \ln 2) = +\infty$$

D'après l'inégalité précédente et un théorème de comparaison de limites, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

Donc la série $\sum_{k=2} \frac{1}{k}$ diverge, donc la variable N ne possède pas d'espérance.

© GROUPE STUDYRAMA

34/38, rue Camille-Pelletan – 92309 Levallois-Perret cedex
Imprimerie Maury – ZI des Ondes 12100 Millau
Imprimé en France – 4^e trimestre 2020

Service éditorial : Benjamin Dias Pereira, Deborah Lopez
Conception graphique : Soft Office

Dépôt légal à parution
ISBN 978-2-7590-4679-9